Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Probeklausur zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(x+\theta)^2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.
a) Welche Beziehung besteht zwischen θ und dem Median der Verteilung der X_k?
b) Geben Sie einen Schätzwert für θ an, wenn im Fall $n = 9$ die Werte

0.3 0.8 0.5 2.3 0.1 9.5 1.2 0.6 10.1

für die Zufallsvariablen ermittelt werden.

2. Die nachfolgenden $n = 8$ Werte

15.3 -0.3 20.2 13.2 2.5 11.7 -1.8 8.0

sollen als Beobachtungen von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit der Dichte

$$\frac{1}{2\sigma} \exp(-|x - \mu|/\sigma), -\infty < x < +\infty,$$

$\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ unbekannte Parameter, aufgefaßt werden können. Bestimmen Sie mit der Momentenmethode Schätzwerte für μ und σ.

3. Zu bekannten gegebenen Werten t_i wurden die in der nachfolgenden Tabelle festgehaltenen Beobachtungswerte x_i von Zufallsvariablen X_i erhalten.

t_i	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{9}{10}$	0	0	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
x_i	2.44	1.87	2.87	2.11	0.33	1.17	0.16	0.02	0.21

Es liege das Modell

$$X_i = \alpha + \beta t_i + Z_i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ unbekannt},$$

mit unabhängigen $N(0, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_n$, je mit derselben unbekannten Varianz $\sigma^2 > 0$ zugrunde.
a) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood Schätzwerte für α, β und σ^2.
b) Prüfen Sie mit einem statistischen Test zum Testniveau 0.1 die Hypothese

$$H : \alpha + \beta = 0 \text{ gegen die Alternative } K : \alpha + \beta \neq 0.$$

c) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für
(1) α, (2) β, (3) $\alpha + \beta$
an.

4. Beeinflußt das unterschiedliche Pflanzdatum (1.Mai, 15.Mai, 29.Mai) den Baumwollertrag? Die 12 Werte in der nachfolgenden Tabelle wurden erhalten, indem man 4 Felder in je 3 Teile teilte und die 3 Teile den 3 Pflanzdaten zufällig zuordnete.

Gepflanzt am	Baumwollsamenertrag [kg]			
1.Mai	3.40	1.49	2.40	2.50
15.Mai	3.87	2.61	2.28	1.95
29.Mai	1.99	2.89	1.68	2.19

Beantworten Sie die Frage mit Hilfe eines statistischen Tests zum 5%-Testniveau. Die Werte können als Beobachtungen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen, je mit derselben unbekannten Varianz σ^2 aufgefaßt werden.

Der Likelihood-Quotiententest und der χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $(r \times s)$-Kontingenztafel

Likelihood-Quotienten und der χ^2-Test für die Hypothese

Es seien $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit dem Wertebereich $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$. Es sei

$$p_{\mu\nu} = P(X_i = \mu, Y_i = \nu) \in (0,1), p_{\mu\cdot} = \sum_{\nu=1}^{s} p_{\mu\nu},\ p_{\cdot\nu} = \sum_{\mu=1}^{r} p_{\mu\nu},\ p_{\mu\cdot}, p_{\cdot\nu} \in (0,1)$$

und

$$N_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} I(X_i = \mu, Y_i = \nu)$$

für $\mu = 1, \ldots, r, \nu = 1, \ldots, s$. Es ist $(N_{11}, \ldots, N_{rs}) \sim \mathfrak{M}(n; p_{11}, \ldots, p_{rs})$. Die Wahrscheinlichkeiten $p_{\mu,\nu}$ bzw. auch die Häufigkeiten $N_{\mu,\nu}$ werden einschließlich ihrer Randsummen $p_{\mu\cdot}s, p_{\cdot\nu}$ bzw. $N_{\mu\cdot} = \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu,\nu}, N_{\cdot\nu} = \sum_{\mu=1}^{r} N_{\mu\nu}$ bei Anwendern häufig in Form einer $r \times s$-*Kontingenztafel*

		2. Merkmal					
		1	·	·	·	s	
1. Merkmal	1	p_{11}	·	·	·	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	r	p_{r1}	·	·	·	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
		$p_{\cdot 1}$	·	·	·	$p_{\cdot s}$	

		2. Merkmal					
		1	·	·	·	s	
1. Merkmal	1	N_{11}	·	·	·	N_{1s}	$N_{1\cdot}$
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	r	N_{r1}	·	·	·	N_{rs}	$N_{r\cdot}$
		$N_{\cdot 1}$	·	·	·	$N_{\cdot s}$	

übersichtlich zusammengestellt. Es soll ein Test zur Prüfung auf Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i, Y_i entwickelt werden. Bei Anwendern spricht man von einem Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$-Kontingenztafel. Das Testproblem lautet

$$H: p_{\mu\nu} = p_{\mu\cdot}p_{\cdot\nu} \text{ für alle } (\mu, \nu),\ \ K: \text{ Es gibt ein Paar } (\mu,\nu) \text{ mit } p_{\mu\nu} \neq p_{\mu\cdot}p_{\cdot\nu}.$$

Bei Gültigkeit der Hypothese bietet sich die Einführung der Parametermenge

$$\Delta = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1})'; \alpha_i \in (0,1), \beta_j \in (0,1), i = 1, \ldots, r-1, j = 1, \ldots, s-1,$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} < 1, \beta_1 + \ldots + \beta_{s-1} < 1\},$$

und die Darstellung der Wahrscheinlichkeiten $p_{\mu\nu}$ durch

$$p_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}) = \alpha_\mu \beta_\nu, 1 \leq \mu \leq r, 1 \leq \nu \leq s,$$

mit $\alpha_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i$ und $\beta_s = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i$ an. Bei Gültigkeit der Hypothese sind die Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\alpha}_\mu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} =: \frac{1}{n} N_{\mu\cdot},\ \mu = 1, \ldots, r,\ \hat{\beta}_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{r} N_{\mu\nu} =: \frac{1}{n} N_{\cdot\nu},\ \nu = 1, \ldots, s.$$

Für die Likelihood-Quotienten-Testgröße L_n und die χ^2-Testgröße T_n gelten die Darstellungen

$$L_n = -2 \log \Lambda\big((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\big) = 2 \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} \log \frac{N_{\mu\nu}}{\frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n}}$$

und

$$T_n = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{s} \frac{(N_{\mu\nu} - \frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n})^2}{\frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n}}.$$

Bei Gültigkeit der Hypothese ist

$$\lim_{n\to\infty} P(L_n \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(T_n \leq x) = P(T \leq x)$$

für jedes $x > 0$, wobei die Zufallsvariable T die $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$-Verteilung hat. Die auf den Testgrößen L_n und T_n basierenden Tests zum asymptotisch ($n \to \infty$) eingehaltenen Testniveau α sind der Likelihood-Quotienten-Test und der χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$-Kontingenztafel.

Likelihood-Quotiententest für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$ Kontingenztafel

Verwirf die Hypothese der Unabhängigkeit, falls $2 \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} \log \frac{N_{\mu\nu}}{\frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n}} > \chi^2_{(r-1)(s-1);1-\alpha}$

χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$ Kontingenztafel

Verwirf die Hypothese der Unabhängigkeit, falls $\sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{s} \frac{(N_{\mu\nu} - \frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n})^2}{\frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n}} > \chi^2_{(r-1)(s-1);1-\alpha}$

$\frac{m}{mw}$ [illegible]

$f^{(x)} = \lambda e^{-\lambda x}$

$L = \lambda^n e^{-\lambda \bar{X} n} = \prod^n \lambda e^{-\lambda x}$

$\ell = n \log(\lambda) - \lambda \bar{X} n$

max $\ell(\lambda) = 0$

$\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$

[illegible]

Tabelle [illegible]

Der Likelihood-Quotiententest und der χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $(r \times s)$-Kontingenztafel

Es seien $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit dem Wertebereich $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$. Es sei

$$p_{\mu\nu} = P(X_i = \mu, Y_i = \nu) \in (0,1), p_{\mu\cdot} = \sum_{\nu=1}^{s} p_{\mu\nu}, \; p_{\cdot\nu} = \sum_{\mu=1}^{r} p_{\mu\nu}, \; p_{\mu\cdot}, p_{\cdot\nu} \in (0,1)$$

und

$$N_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} I(X_i = \mu, Y_i = \nu)$$

für $\mu = 1, \ldots, r, \nu = 1, \ldots, s$. Es ist $(N_{11}, \ldots, N_{rs}) \sim \mathfrak{M}(n; p_{11}, \ldots, p_{rs})$. Die Wahrscheinlichkeiten $p_{\mu,\nu}$ bzw. auch die Häufigkeiten $N_{\mu,\nu}$ werden einschließlich ihrer Randsummen $p_{\mu\cdot}s, p_{\cdot\nu}$ bzw. $N_{\mu\cdot} = \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu,\nu}, N_{\cdot\nu} = \sum_{\mu=1}^{r} N_{\mu\nu}$ bei Anwendern häufig in Form einer $r \times s$-*Kontingenztafel*

		2. Merkmal					
		1	·	·	·	s	
1. Merkmal	1	p_{11}	·	·	·	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	r	p_{r1}	·	·	·	p_{rs}	$p_{r\cdot}$
		$p_{\cdot 1}$	·	·	·	$p_{\cdot s}$	

		2. Merkmal					
		1	·	·	·	s	
1. Merkmal	1	N_{11}	·	·	·	N_{1s}	$N_{1\cdot}$
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·	·	·
	r	N_{r1}	·	·	·	N_{rs}	$N_{r\cdot}$
		$N_{\cdot 1}$	·	·	·	$N_{\cdot s}$	

übersichtlich zusammengestellt. Es soll ein Test zur Prüfung auf Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i, Y_i entwickelt werden. Bei Anwendern spricht man von einem Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$-Kontingenztafel. Das Testproblem lautet

$$H : p_{\mu\nu} = p_{\mu\cdot} p_{\cdot\nu} \text{ für alle } (\mu, \nu), \;\; K : \text{ Es gibt ein Paar } (\mu, \nu) \text{ mit } p_{\mu\nu} \neq p_{\mu\cdot} p_{\cdot\nu}.$$

Bei Gültigkeit der Hypothese bietet sich die Einführung der Parametermenge

$$\Delta = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1})'; \alpha_i \in (0,1), \beta_j \in (0,1), i = 1, \ldots, r-1, j = 1, \ldots, s-1, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} < 1, \beta_1 + \ldots + \beta_{s-1} < 1\},$$

und die Darstellung der Wahrscheinlichkeiten $p_{\mu\nu}$ durch

$$p_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}) = \alpha_\mu \beta_\nu, 1 \leq \mu \leq r, 1 \leq \nu \leq s,$$

mit $\alpha_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i$ und $\beta_s = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i$ an. Bei Gültigkeit der Hypothese sind die Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\alpha}_\mu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} =: \frac{1}{n} N_{\mu\cdot}, \;\; \mu = 1, \ldots, r, \;\; \hat{\beta}_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{r} N_{\mu\nu} =: \frac{1}{n} N_{\cdot\nu}, \;\; \nu = 1, \ldots, s.$$

Für die Likelihood-Quotienten-Testgröße L_n und die χ^2-Testgröße T_n gelten die Darstellungen

$$L_n = -2 \log \Lambda\big((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\big) = 2 \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} \log \frac{N_{\mu\nu}}{\frac{N_{\mu\cdot} N_{\cdot\nu}}{n}}$$

und

$$\boxed{T_n = \sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{s} \frac{(N_{\mu\nu} - \frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n})^2}{\frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n}}.}$$

Bei Gültigkeit der Hypothese ist

$$\lim_{n\to\infty} P(L_n \le x) = \lim_{n\to\infty} P(T_n \le x) = P(T \le x)$$

für jedes $x > 0$, wobei die Zufallsvariable T die $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$-Verteilung hat. Die auf den Testgrößen L_n und T_n basierenden Tests zum asymptotisch ($n \to \infty$) eingehaltenen Testniveau α sind der Likelihood-Quotienten-Test und der χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$-Kontingenztafel.

Likelihood-Quotiententest für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$ Kontingenztafel

Verwirf die Hypothese der Unabhängigkeit, falls $2\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} \log \frac{N_{\mu\nu}}{\frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n}} > \chi^2_{(r-1)(s-1);1-\alpha}$

χ^2-Test für die Hypothese der Unabhängigkeit in einer $r \times s$ Kontingenztafel

Verwirf die Hypothese der Unabhängigkeit, falls $\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{s} \frac{(N_{\mu\nu} - \frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n})^2}{\frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n}} > \chi^2_{(r-1)(s-1);1-\alpha}$

oder

$$\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{s} N_{\mu\nu} - \frac{(N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu})^2}{\frac{N_{\mu\cdot}N_{\cdot\nu}}{n}}$$

?
sieht im übrg.

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-x/2),\ x > 0, \text{ als Dichte der } \chi_n^2\text{-Verteilung}$$

Quantile $\chi^2_{n;\gamma}$ der χ_n^2-Verteilung $\gamma = \int$ [illegible]

		γ							
		0.0100	0.0250	0.0500	0.1000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900
	1	2e-04	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
	2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
	3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
	4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
	5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
	6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
	7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
	8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
	9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
	10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
	11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
	12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
	13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
	14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
	15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
	16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
	17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
	18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
	19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
	20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
	21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
	22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
n	23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
	24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
	25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
	26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
	27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
	28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
	29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
	30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
	31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
	32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
	33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
	34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
	35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
	36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
	37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
	38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
	39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
	40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
	41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
	42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
	43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
	44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
	45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
	46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014

	48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
	49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
	50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539
	51	30.4750	33.1618	35.5999	38.5604	64.2954	68.6693	72.6160	77.3860
	52	31.2457	33.9681	36.4371	39.4334	65.4224	69.8322	73.8099	78.6158
	53	32.0185	34.7763	37.2759	40.3076	66.5482	70.9935	75.0019	79.8433
	54	32.7934	35.5863	38.1162	41.1830	67.6728	72.1532	76.1920	81.0688
	55	33.5705	36.3981	38.9580	42.0596	68.7962	73.3115	77.3805	82.2921
	56	34.3495	37.2116	39.8013	42.9373	69.9185	74.4683	78.5672	83.5134
	57	35.1305	38.0267	40.6459	43.8161	71.0397	75.6237	79.7522	84.7328
	58	35.9135	38.8435	41.4920	44.6960	72.1598	76.7778	80.9356	85.9502
	59	36.6982	39.6619	42.3393	45.5770	73.2789	77.9305	82.1174	87.1657
	60	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794
	61	38.2732	41.3031	44.0379	47.3418	75.5141	80.2321	84.4764	89.5913
	62	39.0633	42.1260	44.8890	48.2257	76.6302	81.3810	85.6537	90.8015
	63	39.8551	42.9503	45.7414	49.1105	77.7454	82.5287	86.8296	92.0100
	64	40.6486	43.7760	46.5949	49.9963	78.8596	83.6753	88.0041	93.2169
	65	41.4436	44.6030	47.4496	50.8829	79.9730	84.8206	89.1771	94.4221
	66	42.2402	45.4314	48.3054	51.7705	81.0855	85.9649	90.3489	95.6257
	67	43.0384	46.2610	49.1623	52.6588	82.1971	87.1081	91.5194	96.8278
	68	43.8380	47.0920	50.0202	53.5481	83.3079	88.2502	92.6885	98.0284
	69	44.6392	47.9242	50.8792	54.4381	84.4179	89.3912	93.8565	99.2275
	70	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252
	71	46.2457	49.5922	52.6003	56.2206	86.6354	91.6702	96.1887	101.6214
	72	47.0510	50.4279	53.4623	57.1129	87.7430	92.8083	97.3531	102.8163
n	73	47.8577	51.2648	54.3253	58.0061	88.8499	93.9453	98.5163	104.0098
	74	48.6657	52.1028	55.1892	58.9000	89.9560	95.0815	99.6783	105.2020
	75	49.4750	52.9419	56.0541	59.7946	91.0615	96.2167	100.8393	106.3929
	76	50.2856	53.7821	56.9198	60.6899	92.1662	97.3510	101.9993	107.5825
	77	51.0974	54.6234	57.7864	61.5858	93.2702	98.4844	103.1581	108.7709
	78	51.9104	55.4656	58.6539	62.4825	94.3735	99.6169	104.3159	109.9581
	79	52.7247	56.3089	59.5223	63.3799	95.4762	100.7486	105.4728	111.1440
	80	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288
	81	54.3566	57.9984	61.2615	65.1765	97.6796	103.0095	107.7834	113.5124
	82	55.1743	58.8446	62.1323	66.0757	98.7803	104.1387	108.9373	114.6949
	83	55.9931	59.6918	63.0039	66.9756	99.8805	105.2672	110.0902	115.8763
	84	56.8130	60.5398	63.8763	67.8761	100.9800	106.3948	111.2423	117.0565
	85	57.6339	61.3888	64.7494	68.7772	102.0789	107.5217	112.3934	118.2357
	86	58.4559	62.2386	65.6233	69.6788	103.1773	108.6479	113.5436	119.4139
	87	59.2790	63.0894	66.4979	70.5810	104.2750	109.7733	114.6929	120.5910
	88	60.1030	63.9409	67.3732	71.4838	105.3722	110.8980	115.8414	121.7671
	89	60.9281	64.7934	68.2493	72.3872	106.4689	112.0220	116.9891	122.9422
	90	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163
	91	62.5811	66.5007	70.0035	74.1955	108.6606	114.2679	119.2819	125.2895
	92	63.4090	67.3556	70.8816	75.1005	109.7556	115.3898	120.4271	126.4617
	93	64.2379	68.2112	71.7603	76.0060	110.8502	116.5110	121.5715	127.6329
	94	65.0677	69.0677	72.6398	76.9119	111.9442	117.6317	122.7151	128.8032
	95	65.8984	69.9249	73.5198	77.8184	113.0377	118.7516	123.8580	129.9727
	96	66.7299	70.7828	74.4005	78.7254	114.1307	119.8709	125.0001	131.1412
	97	67.5624	71.6415	75.2819	79.6329	115.2232	120.9896	126.1414	132.3089
	98	68.3957	72.5009	76.1638	80.5408	116.3153	122.1077	127.2821	133.4757
	99	69.2299	73.3611	77.0463	81.4493	117.4069	123.2252	128.4220	134.6416
	100	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
12. April 2007

Lösungen zum

1. Übungsblatt Stochastik B

Stundenübung

Aufgabe 1. Es seien $X_1, \dots, X_{100}$ unabhängige, unif(0,1)-verteilte Zufallsvariablen. Finden Sie eine Approximation für

$$P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i \le a^{100}\right), \quad 0 < a < 1.$$

Lösung. Um den Zentralen Grenzwertsatz anwenden zu können, logarithmieren wir beide Seiten der Ungleichung und erhalten eine Summe:

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=1}^{100} X_i \le a^{100}\right) &= P\left(\log\left(\prod_{i=1}^{100} X_i\right) \le \log(a^{100})\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{100} \log(X_i) \le 100\log a\right) \end{aligned}$$

Nach dem ZGWS gilt für Y_i i.i.d.: $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ mit $\mu = EY_i$ und $\sigma^2 = \operatorname{var}(Y_i)$. Wir definieren also $Y_i := \log(X_i)$ und berechnen μ und σ.

$$\begin{aligned} \mu = EY_i &= \int_0^1 \log x \, dx \\ &= (x \cdot \log x - x)|_0^1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma = \operatorname{var}(Y_i) &= EY_i^2 - (EY_i)^2 \\ &= \int_0^1 (\log(x))^2 \, dx - (-1)^2 \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \log(x)\cdot(x\cdot\log(x) - x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot(x\cdot\log(x) - x)\,dx - 1 \\ &= \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alternative Lösung: Für $U \sim \text{unif}(0,1)$ gilt $P(-\log U \ge z) = P(U \le e^{-z}) = e^{-z} \forall z \ge 0$. Es folgt, dass $-\log U$ exp(1)-verteilt ist und deshalb Erwartungswert und Varianz 1 hat. Also hat $\log U$ Erwartungswert -1 und Varianz 1.

Damit können wir jetzt den ZGWS benutzen:

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i=1}^{100} \log(X_i) \le 100\log a\right) \\ =\ & P\left(\frac{(\sum_{i=1}^{100}\log(X_i)) - 100\cdot(-1)}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{1}} \le \frac{100\log(a) - 100\cdot(-1)}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{1}}\right) \\ =\ & \Phi(10\cdot(\log(a)+1)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Ein fairer Würfel wird so oft geworfen, bis die Augensumme den Wert 300 übersteigt. Finden Sie einen Näherungswert (mit Hilfe des ZGWS) für die Wahrscheinlichkeit, dass hierfür mindestens 80 Würfe nötig sind.

Lösung. Es sei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfs. Dann ist $P(\sum_{i=1}^{79} X_i \le 300)$ gesucht. Für den ZGWS benötigen wir Erwartungswert und Varianz von X_i, wobei X_i unif$\{1,\dots,6\}$-verteilt ist.

$$\begin{aligned} EX_i &= \sum_{i=1}^{6} i\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = 3.5 \\ \operatorname{var}(X_i) &= EX^2 - (EX^2) \\ &= \sum_{i=1}^{6} i^2\frac{1}{6} - 3.5^2 \\ &= \dots \\ &= \frac{35}{12} = 2.91\bar{6} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{79} X_i \le 300) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{79} X_i - 79\cdot 3.5}{\sqrt{79}\cdot\sqrt{\frac{35}{12}}} \le \frac{300 - 79\cdot 3.5}{\sqrt{79}\cdot\sqrt{\frac{35}{12}}}\right) \\ & \Phi\left(\frac{23.5}{15.18}\right) \\ &\approx \Phi(1.55) = 0.9394 \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe 3. Seien $X_1, \dots, X_{20}$ unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right)$

(a) exakt, z.B. mit Maple, und

(b) approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Lösung. (a) Die Summe von zwei unabhängigen, Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parametern λ_1, λ_2 ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$. Somit ist $\sum_{i=1}^{20} X_i$ Poisson-verteilt mit Parameter 20, also

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 15\right) = 1 - \sum_{k=0}^{15} \frac{20^k}{k!} e^{-20} \underset{\text{Maple}}{=} 0.8434\ldots .$$

(b) Wie im ZGWS verlangt, betrachten wir auch hier die Summe u.i.v. Zufallsvariablen. Der Erwartungswert und die Varianz einer Poisson-verteilten Zva. mit Parameter λ sind $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda$. Es folgt mit dem ZGWS unter Berücksichtigung der Stetigkeitskorrektur

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20 \cdot 1}{\sqrt{1}\sqrt{20}} > \frac{15.5 - 20 \cdot 1}{\sqrt{1}\sqrt{20}}\right) \underset{\text{ZGWS}}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{-4.5}{\sqrt{20}}\right) = \Phi\left(\frac{4.5}{\sqrt{20}}\right) = 0.8428\ldots .$$

Aufgabe 4. Es soll eine sogenannte Multiple-Choice-Klausur konzipiert werden. Dabei sollen die Teilnehmer bei n Aufgaben von jeweils drei Antworten (eine richtige und zwei falsche) eine ankreuzen. Die Klausur soll als bestanden gelten, wenn bei mindestens der Hälfte der Aufgaben die richtige Antwort angekreuzt ist.

Wie groß muss n ungefähr sein, damit höchstens mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit α die Klausur durch rein zufälliges Ankreuzen bestanden werden kann? Welcher Zahlenwert ergibt sich bei $\alpha = 0.025$? Verwenden Sie die Normalapproximation.

Lösung. Sei

$$X_i := \begin{cases} 0, & \text{falls die } i\text{. Frage falsch beantwortet wird,} \\ 1, & \text{falls die } i\text{. Frage richtig beantwortet wird.} \end{cases}$$

$E(X_i) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$Var(X_i) = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Bei rein zufälliger Beantwortung ist $X_i \sim \text{Bin}\left(1, \frac{1}{3}\right)$, also $\mu := \text{E}(X_i) = \frac{1}{3}$ und $\sigma^2 := \text{Var}(X_i) = \frac{2}{9}$. Besteht die Multiple-Choice-Klausur aus n Aufgaben, so möchten wir erreichen, dass

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2}\right) \overset{!}{\leq} \alpha.$$

Diese Forderung ist äquivalent zu

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{3}}{\sqrt{2n}/3} \geq \frac{\frac{n}{2} - \frac{n}{3}}{\sqrt{2n}/3}\right) \overset{!}{\leq} \alpha.$$

Der ZGWS liefert nun, dass die folgende Ungleichung „ungefähr" erfüllt seien sollte,

$$\Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - \frac{n}{3}}{\sqrt{2n}/3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\right) \overset{!}{\geq} 1 - \alpha,$$

also $n \geq 8\left(\Phi^{\ 1}(1 - \alpha)\right)^2$. Damit die ursprüngliche Ungleichung erfüllt ist, wählen wir also

$$n \approx 8\left(\Phi^{-1}(1 - \alpha)\right)^2 .$$

Für $\alpha = 0.025$ liefert dies $n \approx 31$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
3. Mai 2007

4. Übungsblatt Stochastik B

Stundenübung

Aufgabe 13. Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ vom Umfang n aus einer $N(\mu,\sigma^2)$-Verteilung mit bekanntem μ. Gesucht ist ein Test, der die Hypothese $H: \sigma^2 \le \sigma_0^2$ gegen die Alternative $K: \sigma^2 > \sigma_0^2$ testet, und der die Testgröße

$$T := \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$$

verwendet.

(a) Leiten Sie die Verteilung der Testgröße unter der Hypothese her. Bestimmen Sie dazu zuerst

(1) die Verteilung des Quadrats einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariable,

(2) die Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen X, Y, wobei $X \sim \chi_m^2$ und $Y \sim \chi_n^2$ sowie

(3) die Summe der Quadrate von n unabhängigen $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen.

(b) Wie ist der Test durchzuführen? Welcher Zusammenhang besteht zu Teil (a)?

Aufgabe 14. Bei 600 Würfen eines Würfels (unbekannter Qualität) erscheint in 84 Würfen eine Sechs. Reicht dies, um die Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs gleich 1/6 ist, auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ zu verwerfen?

Hausübung

Aufgabe 15. Ausgehend von einer Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ vom Umfang n aus $\mathrm{Bin}(1,\theta)$ soll die Hypothese $H: \theta \le \frac{1}{2}$ getestet werden. Als Testgröße bietet sich

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

an.

(a) Stellen Sie mit Hilfe von Maple die Gütefunktionen graphisch dar, die man bei $n = 10$ mit einem kritischen Wert 8 und bei $n = 50$ mit einem kritischen Wert 32 erhält.

(b) Zeigen Sie, dass die Gütefunktion eines Tests der Form

„Lehne ab, wenn $T \ge c$"

unter der gemachten Verteilungsannahme (X_i, $i = 1, \dots, n$, hat eine $\mathrm{Bin}(1,\theta)$-Verteilung) stetig und monoton wachsend in θ ist.

(c) Angenommen, ein gemäß (b) konstruierter Test hält das Signifikanzniveau α ein. Was lässt sich über den maximalen Fehler 2.Art, also

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c).$$

aussagen?

Hinweis: Verwenden Sie

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c) = 1 - \inf_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T \ge c).$$

Aufgabe 16. Gegeben sind die beiden folgenden Datensätze:

Stichprobe 1:
1.086 , 1.375 , 2.734 , 3.906 , 4.708 , 0.217 , 5.024 , 8.260 , 3.646
Stichprobe 2:
3.103 , 4.937 , 5.467 , 10.10 , 2.858 , 4.902 , 11.48 , 8.682 , 8.738
5.892 , 8.414.

Wir setzen voraus, dass der erste Datensatz eine Stichprobe aus $N(\mu_1, \sigma^2)$ und der zweite eine Stichprobe aus $N(\mu_2, \sigma^2)$ ist; hierbei seien μ_1, μ_2 und $\sigma^2 > 0$ unbekannt.

(a) Testen Sie im ersten Datensatz die Hypothese $\mu_1 = 5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(b) Testen Sie beim zweiten Datensatz die Hypothese $\mu_2 = 5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(c) Testen Sie die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Abgabe der Hausübungen in der Übung am 10. Mai 2007.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
3. Mai 2007

Lösungen zum

4. Übungsblatt Stochastik B

Stundenübung

Aufgabe 13. Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ vom Umfang n aus einer $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung mit bekanntem μ. Gesucht ist ein Test, der die Hypothese $H: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ gegen die Alternative $K: \sigma^2 > \sigma_0^2$ testet, und der die Testgröße

$$T := \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$$

verwendet.

(a) Leiten Sie die Verteilung der Testgröße unter der Hypothese her. Bestimmen Sie dazu zuerst

(1) die Verteilung des Quadrats einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariable,

(2) die Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen X, Y, wobei $X \sim \chi_m^2$ und $Y \sim \chi_n^2$ sowie

(3) die Summe der Quadrate von n unabhängigen $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen.

(b) Wie ist der Test durchzuführen? Welcher Zusammenhang besteht zu Teil (a)?

Lösung. (a) (1) $X \sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2})$

$Y := X^2$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

für $y > 0$. Damit ergibt sich für die Dichte f_Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= (F_Y(y))' \\ &= (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))' \\ &= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-y}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Dies entspricht der Dichte einer $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Verteilung. Diesen Spezialfall nennt man Chi-Quadrat-Verteilung.

(2) Gesucht ist die Faltung zweier Chi-Quadrat-Verteilungen. Wir benutzen den Zusammenhang zur Gamma-Verteilung:

$$\Gamma(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}) * \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{m+n}{2}, \frac{1}{2})$$

$X + Y$ hat also als Verteilung χ_{m+n}^2.

(3) Durch (a) und (b) ergibt sich, dass die Summe der Quadrate von n unabhängigen $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen χ_n^2-verteilt ist.

(b) Falls $\sigma_0 = \sigma$ gilt, ist jeder der Summanden in T N(0,1)-verteilt und $T \sim \chi_n^2$. Falls $\sigma_0 < \sigma$ ist, wird durch einen kleinen Wert als dem wahren geteilt, T wird mit größerer Wahrscheinlichkeit „größere" Werte annehmen als eine χ_n^2-verteilte Zufallsvariable. Falls $\sigma_0 > \sigma$ ist, wird durch einen zu großen Wert als dem wahren geteilt. T wird mit größerer Wahrscheinlichkeit „kleinere" Werte annehmen als eine χ_n^2-verteile Zufallsvariable.

Der Zusammenhang zu (a) besteht darin, dass man die Verteilung von T für den Fall $\sigma_0 = \sigma$ bestimmt hat. Daraus kann man zusammen mit den obigen Überlegungen den folgenden Test ableiten:

(i) berechne T

(ii) bestimme zum gegebenen Signifikanzniveau α das $(1-\alpha)$-Quantil $\chi_{n,1-\alpha}^2$

(iii) Verwerfe H, wenn $T > \chi_{n,1-\alpha}^2$

Aufgabe 14. Bei 600 Würfen eines Würfels (unbekannter Qualität) erscheint in 84 Würfen eine Sechs. Reicht dies, um die Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs gleich 1/6 ist, auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ zu verwerfen?

Lösung. Es sei $X_i := \begin{cases} 1 & \text{6 gewürfelt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Zufallsvariable, die das Ergebnis des i-ten Wurfs angibt. Dann ist X_i $\text{Bin}(1, \frac{1}{6})$-verteilt und hat damit Erwartungswert $EX_i = \frac{1}{6}$ und Varianz $\text{var}(X_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{600} X_i \leq 84) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{600} X_i - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \frac{5}{36}}} \leq \frac{84 - 100}{\sqrt{600 \frac{5}{36}}} \right) \\ &\approx \Phi(-1.75) \\ &= 1 - \Phi(1.75) \\ &= 1 - 0.9599 = 0.0401 < 0.05 \end{aligned}$$

Man kann die Hypothese also nicht verwerfen.

Alternativ verwendet man den (auf den gleichen Überlegungen beruhenden) Test, der in der Vorlesung entwickelt wurde. Dieser Test besagt, dass man die Hypothese verwerfen soll, wenn $\frac{\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \theta_0|}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} > u_{1-\alpha/2}$ gilt. In unserem Fall führt der Test auf $\frac{\sqrt{600}|\frac{84}{600} - \frac{1}{6}|}{\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36}}} \approx 1.75 < 1.9600$. Letzteres ist das $u_{0.975}$-Quantil, das man aus einer entsprechenden Tabelle ablesen kann.

Hausübung

Aufgabe 15. Ausgehend von einer Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ vom Umfang n aus $\mathrm{Bin}(1,\theta)$ soll die Hypothese $H : \theta \le \frac{1}{2}$ getestet werden. Als Testgröße bietet sich

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

an.

(a) Stellen Sie mit Hilfe von Maple die Gütefunktionen graphisch dar, die man bei $n = 10$ mit einem kritischen Wert 8 und bei $n = 50$ mit einem kritischen Wert 32 erhält.

(b) Zeigen Sie, dass die Gütefunktion eines Tests der Form

„Lehne ab, wenn $T \ge c$ "

unter der gemachten Verteilungsannahme (X_i, $i = 1, \dots, n$, hat eine $\mathrm{Bin}(1,\theta)$-Verteilung) stetig und monoton wachsend in θ ist.

(c) Angenommen, ein gemäß (b) konstruierter Test hält das Signifikanzniveau α ein. Was lässt sich über den maximalen Fehler 2.Art, also

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c),$$

aussagen?

Hinweis: Verwenden Sie

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c) = 1 - \inf_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T \ge c).$$

Lösung. (a) Offensichtlich hat T eine $\mathrm{Bin}(n,\theta)$-Verteilung. Die Gütefunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta \;\mapsto\; & P_\theta(T \ge c) \\ &= \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n} P_\theta(T = i) \\ &= \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n} \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} \end{aligned}$$

Abbildung 1 zeigt die beiden Gütefunktionen. Der Fehler 1. Art lässt sich direkt ablesen. Er beträgt in beiden Fällen ungefähr 0.05. Festzuhalten ist die stärkere Trennung für $n = 50$ (die Güte nimmt rascher zu, das Testergebnis wird zuverlässiger).

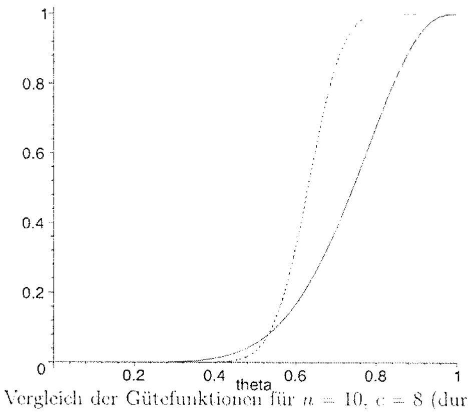


Abbildung 1: Vergleich der Gütefunktionen für $n = 10$, $c = 8$ (durchgezogen) und $n = 50$, $c = 32$ (gestrichelt).

(b) Die Gütefunktion eines solchen Tests haben wir in Teil (a) bestimmt. Die Stetigkeit lässt sich direkt daraus schließen, dass es sich um ein Polynom handelt. Die Funktion ist monoton wachsend in θ, da

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n} \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} \\ &= \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n} \left[\binom{n}{i} \left(i\theta^{i-1}(1-\theta)^{n-i} - \theta^i (n-i)(1-\theta)^{n-i-1} \right) \right] \\ &= n \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n} \binom{n-1}{i-1} \theta^{i-1}(1-\theta)^{n-i} - n \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n-1} \binom{n-1}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i-1} \\ &= n \sum_{i=\lceil c \rceil - 1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i-1} - n \sum_{i=\lceil c \rceil}^{n-1} \binom{n-1}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i-1} \\ &= n \binom{n-1}{\lceil c \rceil - 1} \theta^{\lceil c \rceil - 1} (1-\theta)^{n - \lceil c \rceil - 2} \;\ge\; 0, \end{aligned}$$

die 1. Ableitung also stets nicht-negativ ist.

(c) Es ist

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c) = 1 - \inf_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T \ge c).$$

Da die Gütefunktion nach Teil (b) stetig ist und der Test das Signifikanzniveau einhält, also $P_\theta(T \ge c) \le \alpha$ für alle $\theta \le \frac{1}{2}$ ist, gilt auch $\inf_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T \ge c) \le \alpha$. Somit gilt für den maximalen Fehler 2. Art:

$$\sup_{\theta > \frac{1}{2}} P_\theta(T < c) \ge 1 - \alpha.$$

Ein für gewöhnlich kleines α hat also zur Folge, dass der maximale Fehler 2. Art sehr groß ist.

Aufgabe 16. Gegeben sind die beiden folgenden Datensätze:

Stichprobe 1:
1.086 , 1.375 , 2.734 , 3.906 , 4.708 , 0.217 , 5.024 , 8.260 , 3.646
Stichprobe 2:
3.103 , 4.937 , 5.467 , 10.10 , 2.858 , 4.902 , 11.48 , 8.682 , 8.738
5.892 , 8.414.

Wir setzen voraus, dass der erste Datensatz eine Stichprobe aus $N(\mu_1, \sigma^2)$ und der zweite eine Stichprobe aus $N(\mu_2, \sigma^2)$ ist; hierbei seien μ_1, μ_2 und $\sigma^2 > 0$ unbekannt.

(a) Testen Sie im ersten Datensatz die Hypothese $\mu_1 = 5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(b) Testen Sie beim zweiten Datensatz die Hypothese $\mu_2 = 5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(c) Testen Sie die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Lösung. (a) Bezeichnet x_i den i-ten Wert, $1 \leq i \leq 9$, so erhält man (beispielsweise mit einem Taschenrechner) $\sum_{i=1}^{9} x_i = 30.956$, $\sum_{i=1}^{9} X_i^2 = 154.775$, also

$$X_9 = 3.439, \quad S_9^2 = \frac{1}{8}(154.775 - 9 \cdot 3.439^2) = 6.0418.$$

Wir verwenden den zweiseitigen t-Test (siehe Vorlesung) und erhalten als Wert der Testgröße

$$T = \left|\sqrt{9}(3.439 - 5)/\sqrt{6.0418}\right| = 1.905\ldots,$$

sowie mit Hilfe einer geeigneten Tabelle den kritischen Wert $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{8;1-0.025} = 2.306$. Die Hypothese wird also nicht verworfen.

(b) Wir verfahren wie bei Teil (a) der Aufgabe: Bezeichnet y_i den i-ten Wert im Datensatz, $1 \leq i \leq 11$, so erhält man $\sum_{i=1}^{11} y_i = 74.573$, $\sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 587.130$, also

$$Y_{11} = 6.779, \quad S_{11}^2 = \frac{1}{10}(587.130 - 11 \cdot 6.779^2) = 8.163.$$

Als Testgröße ergibt sich

$$T = \left|\sqrt{11}(6.779 - 5)/\sqrt{8.163}\right| = 2.065,$$

und der kritsche Wert zum Niveau $\alpha = 0.05$ ist $t_{10;1-0.025} = 2.228$, auch diese Hypothese wird also nicht abgelehnt.

(c) Wir verwenden den (zweiseitigen) Zwei-Stichproben-t-Test aus der Vorlesung und können dabei von den bisherigen Rechnungen Gebrauch machen:

$$m = 9,\ \bar{X}_9 = 3.439,\ S_X^2 = 6.0418,$$
$$n = 11,\ \bar{Y}_{11} = 6.779,\ S_Y^2 = 8.163.$$

Mit diesen Werten ergibt sich für die Testgröße der Wert

$$\begin{aligned}
|T_{m,n}| &= \sqrt{\frac{m \cdot n}{m+n}} \left| \frac{\bar{X}_m - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{m+n-2}\left((m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2\right)}} \right| \\
&= \sqrt{\frac{99}{20}} \frac{|3.439 - 6.779|}{\sqrt{\frac{1}{18}(8 \cdot 6.0418 + 10 \cdot 8.163)}} \\
&= 2.765.
\end{aligned}$$

Der kritische Wert ist $t_{m+n-2;1-\alpha/2} = t_{18;1-0.025} = 2.101$. Jetzt also übersteigt der Wert der Testgröße den kritischen Wert – die Hypothese, dass die Mittelwerte gleich sind, wird abgelehnt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
26. April 2007

3. Übungsblatt Stochastik B

Stundenübung

Aufgabe 9. Es sei $X_1, \dots, X_n, n > 2$, eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Ist der in der Vorlesung berechnete Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist seine mittlere quadratische Abweichung?

Aufgabe 10. Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe aus einer geometrischen Verteilung mit unbekanntem Parameter p. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ für den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen. Ist $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist die mittlere quadratische Abweichung?

Hausübung

Aufgabe 11. Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n einer Binomialverteilung mit Parametern 1 und unbekanntem Parameter $0 < \theta < 1$. Wir kennen bereits den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} := \overline{x}_n$ für θ. Als alternativen Schätzer betrachten wir

$$\hat{\theta}_A := \frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n+2}.$$

(a) Ist $\hat{\theta}_A$ erwartungstreu?

(b) Bestimmen Sie die mittlere quadratische Abweichung von $\hat{\theta}_A$.

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (b) mit Hilfe von Maple mit der mittleren quadratischen Abweichung von $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$. Was schließen Sie aus dem Vergleich?

Aufgabe 12. Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe einer Poisson-Verteilung mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$. Ist $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist die mittlere quadratische Abweichung?

Abgabe der Hausübungen in der Übung am 3. Mai 2007.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
26. April 2007

Lösungen zum

3. Übungsblatt Stochastik B

Stundenübung

Aufgabe 9. Es sei $X_1, \dots, X_n, n > 2$, eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Ist der in der Vorlesung berechnete Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta_{\text{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist seine mittlere quadratische Abweichung?

Lösung. In der Vorlesung wurde bestimmt, dass $\hat\theta_{\text{ML}} = \frac{1}{\bar X_n}$ gilt. Wir berechnen nun also

$$\begin{aligned} E_\theta \hat\theta_{\text{ML}} &= \frac{1}{\bar X_n} \\ &= nE\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i} \end{aligned}$$

Bekanntlich gilt für $X_i \sim \exp(\theta), i = 1, \dots, n$, dass $s_n := \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta)$. Damit folgt mit $g(s_n) = \frac{1}{s_n}$:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{s_n}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x}\,dx \\ &= \frac{\theta^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (x\theta)^{n-2} e^{-\theta x}\,dx \\ &= \frac{1}{\theta}\frac{\theta^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-2} e^{-y}\,dy \\ &= \frac{\theta}{\Gamma(n)}\Gamma(n-1) \\ &= \frac{\theta\Gamma(n-1)}{(n-1)\Gamma(n-1)} \\ &= \frac{\theta}{n-1} \end{aligned}$$

Dabei wurde vom zweiten zum dritten Schritt die Substitution $y := \theta x$ verwandt. Damit folgt: $nE\frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{n}{n-1}\theta \neq \theta$. Der Schätzer ist also nicht erwartungstreu.

Für die mittlere quadratische Abweichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat\theta_{\text{ML}}, \theta) &= E(\hat\theta_{\text{ML}} - \theta)^2 \\ &= E(\hat\theta_{\text{ML}}^2) - 2\theta E(\hat\theta_{\text{ML}}) + \theta^2 \\ &= \frac{(n\theta)^2}{(n-1)(n-2)} - 2\theta\frac{n\theta}{n-1} + \theta^2 \\ &= \frac{n^2 - 2n(n-2) + (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)}\theta^2 \\ &= \frac{n+2}{(n-1)(n-2)}\theta^2 \end{aligned}$$

Dabei wurde mit der gleichen Vorgehensweise wie oben

$$E\left(\frac{1}{s_n^2}\right) = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

berechnet.

Aufgabe 10. Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe aus einer geometrischen Verteilung mit unbekanntem Parameter p. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta_{\text{ML}}$ für den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen. Ist $\hat\theta_{\text{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist die mittlere quadratische Abweichung?

Lösung. Es wurde bereits in den Übungen berechnet, dass die ML-Methode als Schätzer für den Parameter p einer geometrischen Verteilung $\hat p = \frac{n}{\sum_{i=1}^n} = \frac{1}{\bar x_n}$ liefert. Ferner hat der Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable mit Parameter p den Wert $\frac{1}{p}$. Damit ergibt sich zusammen mit der Vorlesung:

$$\begin{aligned} \hat\theta_{\text{ML}} &= \frac{1}{\hat p} \\ &= \bar x_n \end{aligned}$$

Für dessen Erwarungswert gilt:

$$\begin{aligned} E\hat\theta_{\text{ML}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \\ &= \frac{1}{n} n \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Der Schätzer ist also erwartungstreu. Definiere $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Damit ergibt sich für den MSE:

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat\theta_{\mathrm{ML}}, \frac{1}{p}) &= \mathrm{var}(\hat\theta_{\mathrm{ML}}) \\ &= \mathrm{var}(\frac{S_n}{n}) \\ &= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{var}(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\,\frac{n(1-p)}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{np^2}\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass S_n NegBin(n,p)-verteilt ist.

Hausübung

Aufgabe 11. Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n einer Binomialverteilung mit Parametern 1 und unbekanntem Parameter $0 < \theta < 1$. Wir kennen bereits den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta_{\mathrm{ML}} := \overline{x}_n$ für θ. Als alternativen Schätzer betrachten wir

$$\hat\theta_A := \frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n+2}.$$

(a) Ist $\hat\theta_A$ erwartungstreu?

(b) Bestimmen Sie die mittlere quadratische Abweichung von $\hat\theta_A$.

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (b) mit Hilfe von Maple mit der mittleren quadratischen Abweichung von $\hat\theta_{\mathrm{ML}}$. Was schließen Sie aus dem Vergleich?

Lösung. (a) $\hat\theta_A$ ist nicht erwartungstreu, denn $\mathrm{E}_\theta\hat\theta_A = \frac{n\mathrm{E}_\theta X_1 + 1}{n+2} = \frac{n\theta+1}{n+2} \neq \theta$.

(b) Die mittlere quadratische Abweichung von $\hat\theta_A$ zu θ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat\theta_A,\theta) &= \mathrm{E}_\theta(\hat\theta_A - \theta)^2 \\ &= \mathrm{E}_\theta\hat\theta_A^2 - 2\mathrm{E}_\theta(\hat\theta_A)\theta + \theta^2 \\ &= \frac{1}{(n+2)^2}\mathrm{E}_\theta\Big(\sum_{i=1}^n X_i + 1\Big)^2 - 2\frac{n\theta+1}{n+2}\theta + \theta^2 \\ &= \frac{2n\mathrm{E}_\theta X_1 + n(n-1)(\mathrm{E}_\theta X_1)^2 + n\mathrm{E}_\theta X_1^2 + 1}{(n+2)^2} - 2\frac{n\theta+1}{n+2}\theta + \theta^2 \\ &= \frac{(n-4)\theta(1-\theta)+1}{(n+2)^2}\end{aligned}$$

(c) Die mittlere quadratische Abweichung von $\hat\theta_{\mathrm{ML}}$ zu θ ist $\mathrm{MSE}(\hat\theta_{\mathrm{ML}},\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$. Ein graphischer Vergleich für $n = 8$ und $n = 40$ liefert die Abbildungen 1 und 2. Dabei stellt die durchgezogende Linie die mittlere quadratische Abweichung von $\hat\theta_{\mathrm{ML}}$ dar und der gepunktete Graph die von $\hat\theta_A$. Es fällt auf, dass keiner der Schätzer gleichmäßig besser ist als der andere. Für ca. $\theta \in (0.17, 0.83)$ (im Fall $n = 8$) hat der Schätzer $\hat\theta_A$ eine kleinere Abweichung, wohingegen für θ nahe bei 0 oder bei 1 der Maximum-Likelihood-Schätzer eine geringere mittlere quadratische Abweichung hat. Abbildung 2 zeigt die Annäherung der quadratischen Abweichungen für große n, die bereits aus der Formel für $\mathrm{MSE}(\hat\theta_A,\theta)$ vermutet werden konnte.

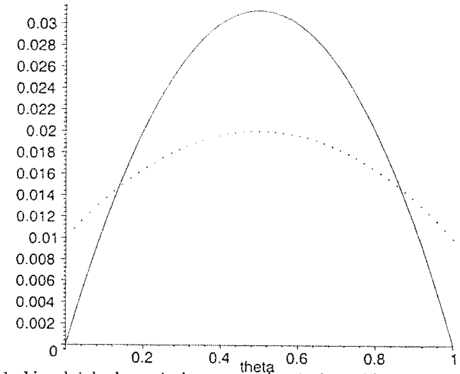


Abbildung 1: Vergleich der mittleren quadratischen Abweichungen für $n = 8$.

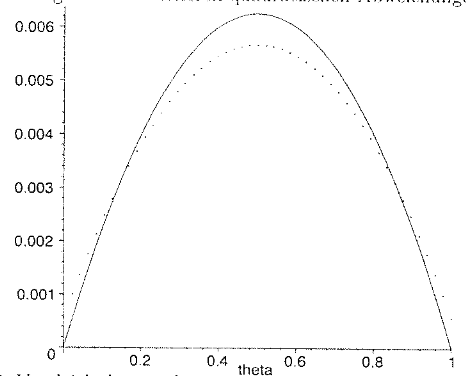


Abbildung 2: Vergleich der mittleren quadratischen Abweichungen für $n = 40$.

Aufgabe 12. Es sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe einer Poisson-Verteilung mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat\theta_{\mathrm{ML}}$. Ist $\hat\theta_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu? Wie groß ist die mittlere quadratische Abweichung?

Lösung. Zur Erinnerung: Ist X_1 Poisson-verteilt mit Parameter θ, dann ist $\mathrm{E}_\theta X_1 = \theta$ und $\mathrm{Var}_\theta X_1 = \theta$.
Die Likelihood-Funktion ist

$$L_x(\theta) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!} \exp(-\theta) \cdots \frac{\theta^{x_n}}{x_n!} \exp(-\theta)$$

und die log-Likelihood-Funktion

$$\log L_x(\theta) = (x_1 + \ldots + x_n) \log \theta - \log(x_1! \cdots x_n!) - n\theta.$$

Als Maximum ergibt sich

$$\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

was ein erwartungstreuer Schätzer ist. Die mittlere quadratische Abweichung ist somit

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}, \theta) = \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}) = \mathrm{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{\theta}{n}.$$

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 9.4.2008

Übungsblatt 1 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, je mit derselben Verteilung

$$P_\vartheta(X_\nu = k) = 1/\vartheta \quad \text{für } k \in \{1, \dots, \vartheta\},$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{N}$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie, dass $\max_{1\le\nu\le n} X_\nu$ Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ und jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta(|\max_{1\le\nu\le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = 0.$$

(2+2 Punkte)

2. Es sei $X \sim \mathfrak{H}(a, r, n)$, wobei $n, r \in \mathbb{N}$ bekannt sind und $a \in \mathbb{N}, a \geq n + r$, unbekannt ist. Zeigen Sie, dass im Fall der Beobachtung $x = 0$ von X kein Maximum-Likelihood-Schätzwert für a existiert.

(2 Punkte)

3. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, je mit derselben Dichte

$$f(x, \vartheta) = \frac{\exp\big(-(x-\vartheta)\big)}{\big[1 + \exp\big(-(x-\vartheta)\big)\big]^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie, dass für jede Beobachtung $(x_1, \dots, x_n)$ von X ein Maximum-Likelihood-Schätzwert existiert.

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert im Falle der Beobachtungen

-5.40	-0.88	-1.38	-0.02	0.46	1.23	-3.98	-2.15	-0.43	-0.26
-0.78	0.07	-3.31	3.13	0.78	2.28	0.71	2.25	-0.16	-0.64

der $n = 20$ Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$.

(3+4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 16.04.2006, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 11.06.2008

Übungsblatt 9 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Die Ergebnisse von 120 Würfelwürfen teilen sich wie folgt auf:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	20	30	20	25	15	10

Prüfen Sie mit einem statistischen Test zum Testniveau $\alpha = 0.05$, ob ein echter Würfel vorliegt.

(3 Punkte)

2. Bei $n = 9621$ Psychotikern wurden die Merkmale *Körperbautyp* und *Psychosetyp* mit den Ausprägungen *1=leptosom, 2= pyknisch, 3= athletisch, 4=dysplastisch, 5=atypisch* und *1=schizophren, 2=manisch depressiv, 3=epileptisch* festgestellt. In der nachfolgenden Tabelle ist für jede Merkmalskombination (i, j), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $j = 1, 2, 3$, die Anzahl der Personen S_{ij}, auf die das Merkmal i und das Merkmal j zutraf, eingetragen. Untersuchen Sie mit einem statistischen Test zum Testniveau $\alpha = 0.05$, ob zwischen Körperbautyp und Psychosetyp ein Zusammenhang besteht.

Merkmale	schizophren	man. depr.	epileptisch
leptosom	2632	259	381
pyknisch	721	875	801
athletisch	883	891	437
dysplastisch	551	16	445
atypisch	454	113	162

(3 Punkte)

3. Der Zufallsvektor (S_1, S_2, S_3) habe eine Trinomial-Verteilung mit den Parametern n (bekannt) und p_1, p_2, p_3 (unbekannt). Stellen Sie zur Prüfung der Hypothese

$$H : p_1 = (1-\theta)^2, p_2 = 2\theta(1-\theta), p_3 = \theta^2, \theta \in (0, 1) \text{ unbekannt}$$

(*Hardy-Weinberg-Gesetz für die Genotypwahrscheinlichkeiten bei zwei Ausprägungen*)

die χ^2-Testgröße T auf. Prüfen Sie, ob im Fall $n = 1000$ die Beobachtung $(230, 499, 271)$ von (S_1, S_2, S_3) mit der Hypothese vereinbar ist, wenn $\alpha = 0.025$ die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist.

(6 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 18.06.2008, vor der Vorlesung

Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 9 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Es werde (20, 30, 20, 25, 15, 10) als Beobachtung des $\mathfrak{M}(n, p_1, \ldots, p_6)$-verteilten Zufallsvektors $(X_1, \ldots, X_6)$ mit $n = 120$ aufgefasst. Die χ^2-Testgröße zur Prüfung der Hypothese $H : p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$, $T = \sum_{j=1}^{6} \frac{(X_j - n/6)^2}{n/6}$, hat den Wert 12.5. Das 0.95-Quantil der χ^2_5-Verteilung ist 11.07050. Die Hypothese wird verworfen.

2. Die χ^2-Testgröße für die Hypothese der Unabhängigkeit der Merkmale *Körperbautyp* und *Psychosetyp* hat den Wert 2305.411 und überschreitet den Wert 15.50731, das 0.95-Quantil der χ^2_8-Verteilung. Beim gewählten Testniveau $\alpha = 0.05$ wird ein signifikanter Zusammenhang der Merkmale *Körperbautyp* und *Psychosetyp* festgestellt.

3. Die χ^2-Testgröße ist

$$T = \frac{\left(S_1 - \frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}} + \frac{\left(S_2 - 2\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)}{n}\right)^2}{2\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)}{n}} + \frac{\left(S_3 - \frac{\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}}.$$

Bei Gültigkeit der Hypothese ist T asymptotisch χ^2_1-verteilt. Für die genannte Beobachtung hat die χ^2-Testgröße den Wert 0.0001021040. Das 0.975-Quantil der χ^2_1-Verteilung ist 5.0239. Bei dem gewählten Testniveau 0.025 ist die Hypothese mit der Beobachtung vereinbar.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 18.06.2008

Übungsblatt 10 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Bestimmen Sie in der Situation der Aufgabe 1 von Blatt 8 ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für μ.

(3 Punkte)

2. Bestimmen Sie in der Situation der Aufgabe 2 von Blatt 8 ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für σ.

(3 Punkte)

3. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Geben Sie ein Verfahren zur Aufstellung eines Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für λ an. Ermitteln Sie bei gegebenem Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$ das Konfidenzintervall für die folgenden $n = 10$ Beobachtungswerte

3.21 2.17 4.11 2.84 2.93 1.98 3.14 4.37 2.87 3.41

der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$.

<u>Hinweis:</u> Überzeugen Sie sich, dass im Falle $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ die Zufallsvariable $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i$ die χ^2_{2n}-Verteilung hat.

(4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 25.06.2008, vor der Vorlesung

Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 10 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Für beobachtete Werte $x_1, \ldots, x_n$ ist

$$\left[\overline{x} - \frac{t_{n-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}\,,\,\overline{x} + \frac{t_{n-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}\right]$$

das beobachtete Konfidenzintervall zum zum Konfidenzniveau $1-\alpha$. Für die genannten Werte ergibt sich das beobachtete Konfidenzintervall [-0.0471389 , 0.1099389]

2. Für beobachtete Werte $x_1, \ldots, x_n$ ist $\left[\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}\,,\,\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}}\right]$ das beobachtete Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für σ. Für die genannten Werte ergibt sich das beobachtete Konfidenzintervall [0.0008023856 , 0.002572439] zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.01$.

3. Für jedes $\lambda > 0$ ist

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P_\lambda\left(\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} \le 2\lambda\sum_{j=1}^{n} X_j \le \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= P_\lambda\left(\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^n X_j} \le \lambda \le \frac{\chi^2_{2n;\frac{1-\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^n X_j}\right),\end{aligned}$$

also

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^n X_j}, \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^n X_j}\right]$$

Konfidenzintervallschätzer zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für λ. Für die genannten Beobachtungswerte ist [0.1545 , 0.5506] das ermittelte Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 04.06.2008

Übungsblatt 8 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Eine Maschine produziert Schrauben, deren Durchmesser den Sollwert 3 mm haben. Kontrollmessungen bei $n = 20$ produzierten Schrauben lieferten die folgenden Abweichungen der Durchmesserwerte vom Sollwert [in mm]:

0.123	0.078	-0.042	-0.096	0.152	0.283	0.006	0.299	0.026	0.058
-0.084	-0.089	0.109	-0.172	-0.254	-0.289	0.204	-0.064	0.148	0.232

Nehmen Sie an, daß diese Werte als Beobachtungen von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung mit unbekannten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ aufgefaßt werden können, und prüfen Sie mit einem geeigneten statistischen Test zum Testniveau $\alpha = 0.05$, ob die Beobachungen mit der Hypothese $H : \mu = 0$ vereinbar sind.

(4 Punkte)

2. Ein Hersteller von Feinwaagen behauptet, dass bei seinen Waagen die Standardabweichung der Meßergebnisse höchstens gleich $\sigma_0 = 0.009$ N ist. Nehmen Sie an, dass die unten genannten Ergebnisse [in N] von 12 Wägungen einer Substanz sich als Beobachtungen von 12 unabhängigen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen auffassen lassen. Prüfen Sie mit einem geeigneten statistischen Test zum Testniveau $\alpha = 0.025$, ob die Hypothese $\sigma \leq \sigma_0$ mit den genannten Ergebnissen vereinbar ist.

2.2869	2.2884	2.2842	2.2859	2.2843	2.2850
2.2871	2.2856	2.2853	2.2861	2.2845	2.2855

(3 Punkte)

3. Die Abhängigkeit der Zugfestigkeit ζ von Beton [in kg/cm^2] von der Trockenzeit s [in Tagen] sei beschrieben durch $\zeta = ab^{1/s}$ mit Parametern $a, b > 0$. Mit $\mu = \lg \zeta, t = 1/s, \alpha = \lg a, \beta = \lg b$ ist $\mu = \alpha + \beta t$. Nehmen Sie an, daß die logarithmierten Werte $x_i = \lg f_i$ von ermittelten Zugfestigkeiten f_i bei Trockenzeiten s_i sich als Beobachtungen von unabhängigen Zufallsvariablen $X_i = \alpha + \beta t_i + Z_i$ mit $N(0, \sigma^2)$-verteilten Z_i auffassen lassen. Prüfen Sie zum Testniveau 0.05, ob die Hypothese $H : b \leq 0.25$ mit den nachfolgend genannten Beobachtungswerten vereinbar ist.

Trockenzeit	1	2	3	7	28
Zugfestigkeit	13.2	21.9	29.8	32.4	42.6

(4 Punkte)

4. Auf einer Besamungsstation stehen drei Bullen B_1, B_2, B_3. Es soll mit Hilfe von n_i Töchterleistungen x_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ j = 1, \ldots, n_i)$ geprüft werden, ob bezüglich der Milchfettmengenleistung Unterschiede in der Vererbungsleistung dieser Bullen bestehen. Es wird angenommen, daß die x_{ij} ermittelte Werte von unabhängigen Zufallsvariablen X_{ij} von der Form $X_{ij} = a_i + Z_{ij}$ sind, wobei die Z_{ij} unabhängige $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen sind und $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sowie $\sigma^2 > 0$ unbekannt sind.

	Bulle		
	B_1	B_2	B_3
x_{ij}	120	153	130
	155	144	138
	131	147	122
	130		
n_i	4	3	3

Milchfettmengenleistung x_{ij} der Töchter von 3 Bullen

Prüfen Sie mit einem statistischen Test, dessen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art gleich 0.05 ist, ob die Milchfettmengenleistungen der Töchter gleich sind.

(3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 11.06.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 12.06.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 8 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Der Wert der t-Testgröße $\frac{\sqrt{n}|\overline{X}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2}}$ des zweiseitigen t-Tests für das Testproblem $H: \mu = 0$, $K: \mu \neq 0$ ist 0.8368. Das 0.975-Quantil der t_{19}-Verteilung ist 2.0930. Die beobachteten Werte sind beim gewählten Testniveau 0.05 mit der Hypothese vereinbar.

2. Der Wert der Testgröße $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ ist 0.2127. Es ist $\chi^2_{11;0.975} = 21.9201$. Die Hypothese ist beim Testniveau $\alpha = 0.025$ mit den Beobachtungen vereinbar.

3. Der Wert der t-Testgröße für die Steigung β der Regressionsgeraden (Hypothese $H: \beta \leq \lg 0.25$) ist 2.1343. Das 0.95-Quantil der t_3-Verteilung ist 2.3534. Beim Testniveau $\alpha = 0.05$ ist die Hypothese mit den Beobachtungen vereinbar.

4. Es ist

$$X = (X_{11}, \ldots, X_{14}, X_{21}, \ldots, X_{23}, X_{31}, \ldots, X_{33})$$

und für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\overline{X}_{i\cdot} := \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

und

$$\overline{X}_{\cdot\cdot} := \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}.$$

Die F-Testgröße für für das Testproblem

$$\mathrm{H}: a_1 = a_2 = a_3$$

bei der einfachen Varianzanalyse ist

$$T(X) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} n_i(\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot})^2}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot})^2}.$$

Wegen

$$T(X) \approx 2.297 < 4.74 = F_{2,7;0.95}$$

wird die Hypothese H nicht verworfen.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 25.06.2008

Übungsblatt 11 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Zu bekannten gegebenen Werten y_i wurden die in der nachfolgenden Tabelle festgehaltenen Beobachtungswerte x_i von Zufallsvariablen X_i erhalten.

y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	1	2	3	5	3	7	6	8	9

Es liege das Modell

$$X_i = a + by_i + Z_i, \quad b \in \mathbb{R} \text{ unbekannt},$$

mit unabhängigen $N(0, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_n$, je mit derselben unbekannten Varianz $\sigma^2 > 0$ zugrunde. Es sei $y_0 = 3.8$. Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für $a + by_0$ an.

(4 Punkte)

2. Die Resultate von gleichgenauen Messungen der Eindringtiefe x_i eines Körpers in ein Hindernis bei verschiedenen einstellbaren Werten seiner spezifischen Energie v_i (d.h. Energie pro Einheitsfläche des Hindernisses) sind in der nachfolgenden Tabelle angegeben.

v_i	41	50	81	104	120	139	154	180	208	241	250	269	301
x_i	4	8	10	14	16	20	19	23	26	30	31	36	37

Nehmen Sie an, daß die beobachteten Eindringtiefen ermittelte Werte von unabhängigen Zufallsvariablen $X_i \sim N(a + bv_i, \sigma^2)$ mit unbekannten Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ sind. Geben Sie eine graphische Darstellung des Konfidenzgürtels zum Konfidenzniveau 0.95 für $a + bv, v \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 02.07.2008, vor der Vorlesung

Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 11 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

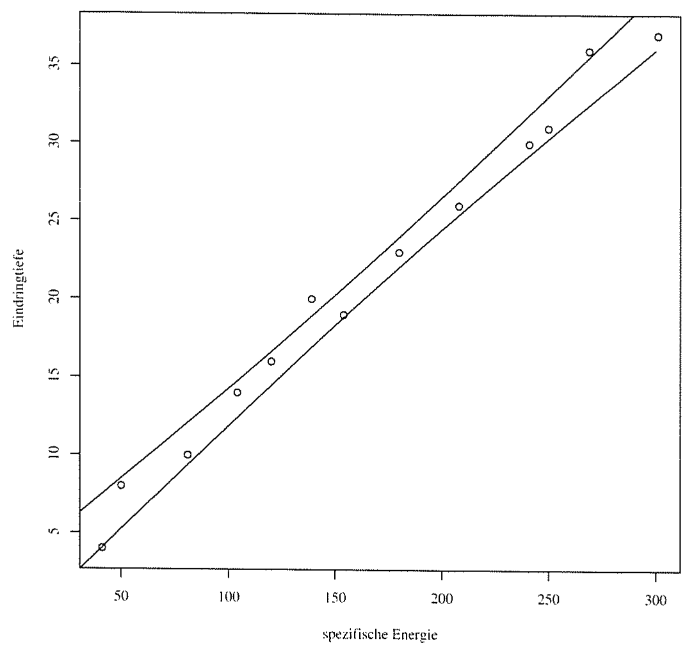
1. Es seien $\hat{a}, \hat{b}$ und $\hat{\sigma}^2$ die Maximum-Likelihood Schätzer von a, b und σ^2. Mit $c = t_{n-2;0.975}$ und $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$ ist

$$\left[\hat{a} + \hat{b}y_0 - c\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{(y_0 - \overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right)}, \hat{a} + \hat{b}y_0 + c\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{(y_0 - \overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right)}\right]$$

Konfidenzintervallschätzer zum Konfidenzniveau 0.95 für $a + by_0$. Das aus den gegebenen Beobachtungswerten ermittelte Konfidenzintervall ist $[3.1372\,,\, 4.5816]$.

2.

Konfidenzguertel zum Niveau 0.05



Bach S08

Quantile $F_{m,n;\gamma}$ der $F_{m,n}$-Verteilung

$\gamma = \int_{-\infty}^{F_{m,n;\gamma}} f_{m,n}(x)\,dx$, $\gamma \in (0,1)$, mit $f_{m,n}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}$, $x > 0$, als Dichte der $F_{m,n}$-Verteilung.

Es ist $F_{m,n;\gamma} = 1/F_{n,m;1-\gamma}$. Für große Werte von n kann $F_{m,n;\gamma}$ durch $\frac{1}{m}\chi^2_{m;\gamma}$ ersetzt werden, wobei $\chi^2_{m;\gamma}$ das γ-Quantil der χ^2_m-Verteilung ist.

		$\gamma = 0.9$													
		m													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
	1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195	61.220	61.740	62.265	62.794
	2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916	9.4247	9.4413	9.4579	9.4746
	3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304	5.2003	5.1845	5.1681	5.1512
	4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199	3.8704	3.8443	3.8174	3.7896
	5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974	3.238	3.2067	3.1741	3.1402
	6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369	2.8712	2.8363	2.8000	2.7620
	7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025	2.6322	2.5947	2.5555	2.5142
	8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380	2.4642	2.4246	2.3830	2.3391
	9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163	2.3396	2.2983	2.2547	2.2085
	10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226	2.2435	2.2007	2.1554	2.1072
	11	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.3040	2.2735	2.2482	2.1671	2.1230	2.0762	2.0261
	12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878	2.1049	2.0597	2.0115	1.9597
n	13	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.2830	2.2341	2.1953	2.1638	2.1376	2.0532	2.0070	1.9576	1.9043
	14	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.1220	2.0954	2.0095	1.9625	1.9119	1.8572
	15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593	1.9722	1.9243	1.8728	1.8168
	16	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.1280	2.0880	2.0553	2.0281	1.9399	1.8913	1.8388	1.7816
	17	3.0262	2.6446	2.4374	2.3077	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284	2.0009	1.9117	1.8624	1.8090	1.7506
	18	3.0070	2.6239	2.4160	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047	1.9770	1.8868	1.8368	1.7827	1.7232
	19	2.9899	2.6056	2.3970	2.2663	2.1760	2.1094	2.0580	2.0171	1.9836	1.9557	1.8647	1.8142	1.7592	1.6988
	20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649	1.9367	1.8449	1.7938	1.7382	1.6768
	25	2.9177	2.5283	2.3170	2.1842	2.0922	2.0241	1.9714	1.9292	1.8947	1.8658	1.7708	1.7175	1.6589	1.5934
	30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0492	1.9803	1.9269	1.8841	1.8490	1.8195	1.7223	1.6673	1.6065	1.5376
	40	2.8354	2.4404	2.2261	2.0909	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929	1.7627	1.6624	1.6052	1.5411	1.4672
	60	2.7911	2.3933	2.1774	2.0410	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.7380	1.7070	1.6034	1.5435	1.4755	1.3952
	120	2.7478	2.3473	2.1300	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.7220	1.6842	1.6524	1.5450	1.4821	1.4094	1.3203

		$\gamma = 0.95$													
		m													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
n	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95	248.01	250.10	252.20
	2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.429	19.446	19.462	19.479
	3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7029	8.6602	8.6166	8.5720
	4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.8578	5.8025	5.7459	5.6877
	5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6188	4.5581	4.4957	4.4314
	6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9381	3.8742	3.8082	3.7398
	7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5107	3.4445	3.3758	3.3043
	8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2184	3.1503	3.0794	3.0053
	9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0061	2.9365	2.8637	2.7872
	10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.8450	2.7740	2.6996	2.6211
	11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7186	2.6464	2.5705	2.4901
	12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6169	2.5436	2.4663	2.3842
	13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.5331	2.4589	2.3803	2.2966
	14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.4630	2.3879	2.3082	2.2229
	15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4034	2.3275	2.2468	2.1601
	16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.3522	2.2756	2.1938	2.1058
	17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3077	2.2304	2.1477	2.0584
	18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.2686	2.1906	2.1071	2.0166
	19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.2341	2.1555	2.0712	1.9795
	20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2033	2.1242	2.0391	1.9464
	25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.0889	2.0075	1.9192	1.8217
	30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0148	1.9317	1.8409	1.7396
	40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	1.9245	1.8389	1.7444	1.6373
	60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.8364	1.7480	1.6491	1.5343
	120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.7505	1.6587	1.5543	1.4290

		$\gamma = 0.975$													
		m													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
	1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	984.87	993.10	1001.4	1009.8
	2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.332	39.355	39.373	39.387	39.398	39.431	39.448	39.465	39.481
	3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419	14.253	14.167	14.081	13.992
	4	12.218	10.649	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.6565	8.5599	8.4613	8.3604
	5	10.007	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.4277	6.3286	6.2269	6.1225
	6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.2687	5.1684	5.0652	4.9589
	7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.5678	4.4667	4.3624	4.2544
	8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1012	3.9995	3.8940	3.7844
	9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.7694	3.6669	3.5604	3.4493
	10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.5217	3.4185	3.3110	3.1984
	11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.3299	3.2261	3.1176	3.0035
	12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.1772	3.0728	2.9633	2.8478
n	13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.0527	2.9477	2.8372	2.7204
	14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	2.9493	2.8437	2.7324	2.6142
	15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.8621	2.7559	2.6437	2.5242
	16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.7875	2.6808	2.5678	2.4471
	17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.7230	2.6158	2.5020	2.3801
	18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.6667	2.5590	2.4445	2.3214
	19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.6171	2.5089	2.3937	2.2696
	20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.5731	2.4645	2.3486	2.2234
	25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.4110	2.3005	2.1816	2.0516
	30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.3072	2.1952	2.0739	1.9400
	40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.1819	2.0677	1.9429	1.8028
	60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.0613	1.9445	1.8152	1.6668
	120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	1.9450	1.8249	1.6899	1.5299

	$\gamma = 0.99$													
	m													
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.7	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8	6157.3	6208.7	6260.65	6313.0
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.433	99.449	99.466	99.483
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	26.872	26.690	26.505	26.316
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.198	14.020	13.838	13.652
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.7222	9.5527	9.3793	9.2020
6	13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741	7.5590	7.3958	7.2285	7.0567
7	12.246	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201	6.3143	6.1554	5.9920	5.8236
8	11.259	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143	5.5151	5.3591	5.1981	5.0316
9	10.561	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565	4.9621	4.8080	4.6486	4.4831
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491	4.5581	4.4054	4.2469	4.0819
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315	4.5393	4.2509	4.0990	3.9411	3.7761
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875	4.2961	4.0096	3.8584	3.7008	3.5355
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911	4.1003	3.8154	3.6646	3.5070	3.3413
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297	3.9394	3.6557	3.5052	3.3476	3.1813
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948	3.8049	3.5222	3.3719	3.2141	3.0471
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804	3.6909	3.4089	3.2587	3.1007	2.9330
17	8.3997	6.1121	5.1805	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822	3.5931	3.3117	3.1615	3.0032	2.8348
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971	3.5082	3.2273	3.0771	2.9185	2.7493
19	8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225	3.4338	3.1533	3.0031	2.8442	2.6742
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567	3.3682	3.0880	2.9377	2.7785	2.6077
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172	3.1294	2.8502	2.6993	2.5383	2.3637
30	7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665	2.9791	2.7002	2.5487	2.3860	2.2079
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876	2.8005	2.5216	2.3689	2.2034	2.0194
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185	2.6318	2.3523	2.1978	2.0285	1.8363
120	6.8509	4.7865	3.9491	3.4795	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586	2.4721	2.1915	2.0346	1.8600	1.6557

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 28.5.2008

Übungsblatt 7 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen X_ν, je mit derselben $\mathfrak{P}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Es sei $\lambda_0 \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$.

a) Schlagen Sie für das Testproblem

$$H: \lambda = \lambda_0, \quad K: \lambda \neq \lambda_0$$

einen Test $\varphi(X)$ mit der Eigenschaft $E_{\lambda_0}(\varphi(X)) = \alpha$ vor. Welchen approximativen Test schlagen Sie bei großen Werten von n vor? Schlagen Sie außerdem ein approximatives Verfahren zur Berechnung der Gütefunktion des Tests vor.

b) Vergleichen Sie im Fall $n = 10, \lambda_0 = 5, \alpha = 0.05$ die approximativen mit den exakten Werten der Gütefunktion für $\lambda = 4$ und $\lambda = 5$. Stellen Sie den Verlauf der Gütefunktion graphisch dar.

(3+3 Punkte)

2. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen X_ν, je mit derselben $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Es sei $\lambda_0 \in (0, \infty)$ gegeben.

a) Stellen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Testniveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem

$$H: \lambda \geq \lambda_0, \quad K: \lambda < \lambda_0$$

auf. Schlagen Sie auch einen Test zum Testniveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem

$$H: \lambda = \lambda_0, \quad K: \lambda \neq \lambda_0$$

vor.

b) Die Lebensdauer von Transistoren einer Produktionsserie sei $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Der Hersteller behauptet, dass der Erwartungswert der Lebensdauer der Transistoren größer als 3 Jahre ist. Nehmen Sie an, dass die nachfolgend genannten Lebensdauern (Einheit: Jahre) von $n = 22$ Transistoren dieser Produktionsserie als Beobachtungen von n unabhängigen Zufallsvariablen, je mit derselben $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung, aufgefaßt werden können.

2.01	0.21	2.53	1.90	0.21	1.82	2.65	3.74	5.46	0.24	1.12
3.16	0.39	3.35	2.13	2.76	5.61	1.80	2.95	4.18	1.12	4.21

Schlagen Sie einen statistischen Test zum Testniveau $\alpha = 0.1$ zur Überprüfung der Behauptung des Herstellers vor. Formulieren Sie das Testproblem und interpretieren Sie das Ergebnis Ihres statistischen Tests.

(4+4 Punkte)

- bitte wenden -

3. Bei einem vom Biologen Mendel durchgeführten Kreuzungsversuch mit Erbsenpflanzen (mit den Genotypen Aa, A $\hat{=}$ gelb, a $\hat{=}$ grün) ergaben sich 355 gelbe und 123 grüne Erbsen. Prüfen Sie mit einem Verfahren, dessen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art näherungsweise $\alpha = 0.05$ ist, die Mendelsche Spaltungsregel, nach der im vorliegenden Fall jede Erbse jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gelb und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ grün ist.

(3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 04.06.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover

Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. L. Baringhaus

Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 05.06.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 7 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. a) Es ist $S = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathfrak{P}(n\lambda)$ bei zugrunde liegendem Parameter $\lambda > 0$. In Anlehnung an den einseitigen Fall definieren wir

$$c_1 = \max\Big\{x \in \mathbb{N}_0; P_{\lambda_0}(S < x) \le \frac{\alpha}{2}\Big\},$$
$$c_2 = \min\Big\{x \in \mathbb{N}_0; P_{\lambda_0}(S > x) \le \frac{\alpha}{2}\Big\},$$
$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S < c_1) = \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{\frac{\alpha}{2} - P_{\lambda_0}(S<c_1)}{P_{\lambda_0}(S=c_1)}, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S < c_1) < \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$
$$\gamma_2 = \begin{cases} 0, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S > c_2) = \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{\frac{\alpha}{2} - P_{\lambda_0}(S>c_2)}{P_{\lambda_0}(X=c_2)}, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S > c_2) < \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Für die Testfunktion

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & \text{falls } s < c_1 \text{ oder } s > c_2, \\ \gamma_1, & \text{falls } s = c_1, \\ \gamma_2, & \text{falls } s = c_2, \\ 0, & \text{falls } c_1 < s < c_2. \end{cases}$$

gilt $E_0(\varphi(S)) = \alpha$. Für große Werte von n bieten sich die durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten Approximationen

$$c_1 \approx n\lambda_0 + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0},$$
$$c_2 \approx n\lambda_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0},$$
$$\gamma_1 \approx 0,$$
$$\gamma_2 \approx 0$$

an. Wegen $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ führen diese auf den approximativen zweiseitigen Test

$$\tilde{\varphi}(X) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ 0, & \text{falls } \frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0)}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Für die Gütefunktionen von $\varphi(S)$ und $\tilde{\varphi}(S)$ bietet sich ebenfalls die durch den zentralen Grenzwertsatz begründete Approximation

$$\begin{aligned} E_\lambda(\varphi(S)) &\approx E_\lambda(\tilde{\varphi}(S)) \\ &= P_\lambda\Big(\frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big) \\ &= P_\lambda\Big(\frac{S-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big) \\ &\quad + P_\lambda\Big(\frac{S-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big) \\ &\approx 1 - \Phi\Big(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big) \\ &\quad + \Phi\Big(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big) \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ an.

b) Eine graphische Darstellung der Gütefunktionen des Tests im Fall $n = 10, \lambda_0 = 5, \alpha = 0.05$ gibt das nachfolgende Bild. Zum Vergleich ist auch der Graph der durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten approximativen Gütefunktion wiedergegeben.

Für $\lambda = 4$ ist der Wert der Gütefunktion $E_4(\varphi(X)) = 0.3036350$ und 0.2709562 der approximative Wert. Für $\lambda = 5$ sind der Wert der Gütefunktion und der approximative Wert 0.05.

2. Mit
$$f(x,\lambda) = \lambda^n \exp(-\lambda(x_1 + \cdots + x_n))$$
für $x = (x_1, \dots, x_n) \in (0,\infty)^n$ und $\lambda > 0$ ist für $\lambda = \lambda_1 < \lambda_0$ und eine Konstante $k > 0$

$$\frac{f(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_0)} = \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^n \exp\big(-(\lambda_1 - \lambda_0)(x_1 + \cdots + x_n)\big) \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} k$$

genau dann, wenn

$$x_1 + \cdots + x_n \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} c$$

mit einer passenden Konstante c ist. Es ist $X_1 + \cdots + X_n \sim G(n,\lambda)$, wenn λ der zugrunde liegende Parameter ist. Dabei ist $G(n,\lambda)$ die *Gamma-Verteilung* oder *Erlang-Verteilung* mit den Parametern n und λ. Die Dichte dieser Verteilung ist

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}\exp(-\lambda x) \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und 0 sonst.}$$

Wählen wir $c \in (0,\infty)$ als $1-\alpha$-Quantil der $G(n,\lambda_0)$-Verteilung, so ist

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X_1 + \cdots + X_n > c, \\ 0, & X_1 + \cdots + X_n \le c. \end{cases}$$

ein bester Test zum Testniveau $\alpha \in (0,1)$ für das einfache Testproblem $H : \lambda = \lambda_0$, $K : \lambda = \lambda_1$. Da dieser Test nicht vom Paramter $\lambda_1 < \lambda_0$ abhängt, ist er auch gleichmäßig bester Test für das Testproblem $H : \lambda = \lambda_0$, $K : \lambda < \lambda_0$. Es ist

$$\begin{aligned} E_\lambda\big(\phi(X)\big) &= P_\lambda(X_1 + \cdots + X_n > c) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_c^\infty x^{n-1} \exp(-\lambda x)\, dx \end{aligned}$$

eine streng monoton wachsende Funktion von $\lambda > 0$, also $\varphi(X)$ ein gleichmäßiger bester Test zum Testniveau α für das genannte Testproblem.

b) Mit

$$m(\lambda) = 1/\lambda = E_\lambda(X_1)$$

als Erwartungswert von X_1 kann das Testproblem in Teil a) äquivalent in der Form

$$H : m(\lambda) \leq m(\lambda_0), \ \ K : m(\lambda) > m(\lambda_0)$$

geschrieben werden. Formulieren wir die Behauptung des Herstellers als Alternative, so ist im hier vorliegenden Fall $n = 20$, $\lambda_0 = 1/3$ und 84.55281 das 0.9-Quantil der $G(n, \lambda_0)$-Verteilung. Die Summe der genannten Beobachtungswerte ist 53.55. Die Hypothese ist beim Testniveau 0.1 mit den gemachten Beobachtungen vereinbar.

3. Wir gehen davon aus, dass die Anzahl X der bei den $n = 487$ Kreuzungsversuchen sich ergebenden gelben Erbsen $\mathfrak{B}(n,p)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$ ist. Wir schlagen den approximativen zweiseitigen Binomialtest

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{|X - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_{1-\alpha/2} \\ 0, & \frac{|X - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq u_{1-\alpha/2}, \end{cases}$$

zur Behandlung des Testproblems

$$H : p = p_0, \ \ K : p \neq p_0$$

mit $p_0 = \frac{3}{4}$ und $\alpha = 0.05$ vor. Mit dem beobachteten Wert 355 von X erhalten wir $\frac{|355 - 478\frac{3}{4}|}{\sqrt{478\frac{3}{4}\frac{1}{4}}} = 0.3697 < 1.96 = u_{0.975}$. Der Test führt beim Testniveau $\alpha = 0.05$ nicht zur Ablehnung der Hypothese.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 9.4.2008

Tutorium ~~18.07 – 20.07.08~~
9:00 – 11:00 F442

Übungsblatt 1 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben Verteilung

$$P_\vartheta(X_\nu = k) = 1/\vartheta \quad \text{für } k \in \{1, \ldots, \vartheta\},$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{N}$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie, dass $\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu$ Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ und jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta(|\max_{1\le\nu\le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = 0.$$

(2+2 Punkte)

2. Es sei $X \sim \mathfrak{H}(a, r, n)$, wobei $n, r \in \mathbb{N}$ bekannt sind und $a \in \mathbb{N}, a \ge n + r$, unbekannt ist. Zeigen Sie, dass im Fall der Beobachtung $x = 0$ von X kein Maximum-Likelihood-Schätzwert für a existiert.

(2 Punkte)

3. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben Dichte

$$f(x, \vartheta) = \frac{\exp(-(x-\vartheta))}{\left[1 + \exp(-(x-\vartheta))\right]^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie, dass für jede Beobachtung $(x_1, \ldots, x_n)$ von X ein Maximum-Likelihood-Schätzwert existiert.

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert im Falle der Beobachtungen

-5.40	-0.88	-1.38	-0.02	0.46	1.23	-3.98	-2.15	-0.43	-0.26
-0.78	0.07	-3.31	3.13	0.78	2.28	0.71	2.25	-0.16	-0.64

der $n = 20$ Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.

(3+4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 16.04.2006, vor der Vorlesung

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 17. April 2006

Lösungen der Aufgaben von Blatt 1 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2006

1. a) Für eine Beobachtung $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ von X ist

$$P_\vartheta(X = x) = \frac{1}{\vartheta^n} I(\max_{1 \le \nu \le n} \le \vartheta)$$

und daher $\hat{\vartheta}(x) = \max_{1 \le \nu \le n} x_\nu$ Maximmum-Likelihood Schätzwert für ϑ.
b) Für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ und jedes $0 < \epsilon < 1$ ist

$$P_\vartheta(|\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = P_\vartheta(\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu \le \vartheta - \epsilon) = \big(P(X_1 \le \vartheta - 1)\big)^n = \big(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta}\big)^n,$$

also $\lim_{n \to \infty} P_\vartheta(|\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = 0$.

2. Es ist für jedes $a \in \mathbb{N}, a \ge n + r$

$$P_a(X = 0) = \frac{(a-r)(a-r-1)\dots(a-r-n+1)}{a(a-1)\dots(a-n+1)} < 1,$$

so dass wegen

$$\sup_{a \in \mathbb{N}, a \ge n+r} P_a(X = 0) = 1$$

kein Maximum-Likelihood Schätzwert existiert.

3. a) Für jedes $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Ableitung der Log-Likelihoodfunktion

$$h(\vartheta) = n - 2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\exp\big(-(x_\nu - \vartheta)\big)}{1 + \exp\big(-(x_\nu - \vartheta)\big)}, \quad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

streng monoton fallend. Ferner ist

$$\lim_{\vartheta \to -\infty} h(\vartheta) = n \text{ und } \lim_{\vartheta \to \infty} h(\vartheta) = -n.$$

b) Ein numerisches Verfahren liefert bei Einsetzung der gegebenen Werte für die Ableitung der Log-Likelihoodfunktion die (approximative) Nullstelle -0.267.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 16.4.2008

Übungsblatt 2 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, je mit derselben $\mathfrak{P}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Zeigen Sie, dass $\overline{X}$ ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für λ ist.

(3 Punkte)

2. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, je mit derselben Verteilung

$$P_\vartheta(X_\nu = k) = 1/\vartheta \quad \text{für } k \in \{1, \dots, \vartheta\},$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{N}$ unbekannt ist.

a) Bestimmen Sie die Verteilung des Maximum-Likelihood Schätzers $M = \max_{1 \le \nu \le n} X_\nu$ für ϑ.

b) Zeigen Sie, dass

$$d(M) = \frac{M^{n+1} - (M-1)^{n+1}}{M^n - (M-1)^n}$$

ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für ϑ ist.

<u>Hinweis:</u> Überlegen Sie sich, dass für jede Funktion $d : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$, für die für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$

$$\sum_{x_1=1}^{\vartheta} \cdots \sum_{x_n=1}^{\vartheta} d(x_1, \dots, x_n) = 0$$

ist, folgt, dass für jedes $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n \\ \max_{1 \le \nu \le n} x_\nu = t}} d(x_1, \dots, x_n) = 0$$

ist, und wenden Sie das Kovarianzkriterium von Rao an.

(2+4 Punkte)

3. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n)'$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, je mit derselben $N(a, \sigma^2)$-Verteilung.

a) Es sei B eine reelle, orthogonale $(n \times n)$-Matrix, $Y = BX$. Zeigen Sie, dass die Komponenten $Y_1, \dots, Y_n$ von Y unabhängig und normalverteilt sind.

b) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ und die empirische Varianz

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu - \overline{X})^2$$

unabhängige Zufallsvariablen sind.

(2+4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 23.04.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.10.2007

Lösungen der Aufgaben von Blatt 2 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Für $d : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{R}$ mit $E_\lambda\big(|d(X_1,\dots,X_n)|^2\big) < \infty$ für jedes $\lambda > 0$ ist

$$0 = E_\lambda\big(d(X_1,\dots,X_n)\big) \quad \text{für jedes} \quad \lambda > 0$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{x_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_n=0}^{\infty} d(x_1,\dots,x_n)\frac{1}{x_1!\dots x_n!}\lambda^{x_1+\dots+x_n}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ x_1+\dots+x_n=k}} d(x_1,\dots,x_n)\frac{1}{x_1!\dots x_n!}\Bigg]\lambda^k\end{aligned}$$

für jedes $\lambda > 0$ ist. Letzteres trifft genau dann zu, wenn

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ x_1+\dots+x_n=k}} d(x_1,\dots,x_n)\frac{1}{x_1!\dots x_n!} = 0$$

ist. Dies impliziert

$$\begin{aligned}&E_\lambda\big(d(X_1,\dots,X_n)\overline{X}\big)\\ &= \exp(-n\lambda)\sum_{x_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_n=0}^{\infty} d(x_1,\dots,x_n)\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\frac{1}{x_1!\dots x_n!}\lambda^{x_1+\dots+x_n}\\ &= \exp(-n\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ x_1+\dots+x_n=k}} d(x_1,\dots,x_n)\frac{1}{x_1!\dots x_n!}\Bigg]\lambda^k\\ &= 0\end{aligned}$$

für jedes $\lambda > 0$, so dass mit dem Kovarianzkriterium von Rao die Behauptung folgt.

2. a) Es ist

$$\begin{aligned}P_\vartheta(M = k) &= P_\vartheta(M \le k) - P_\vartheta(M \le k-1)\\ &= \frac{1}{\vartheta^n}\Big[k^n - (k-1)^n\Big],\quad k \in \{1,\dots,\vartheta\}, \vartheta\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}E_\vartheta\big(d(M)\big) &= \sum_{k=1}^{\vartheta}\frac{k^{n+1}-(k-1)^{n+1}}{k^n-(k-1)^n}\frac{1}{\vartheta^n}\Big[k^n-(k-1)^n\Big]\\ &= \sum_{k=1}^{\vartheta}\frac{1}{\vartheta^n}\Big[k^{n+1}-(k-1)^{n+1}\Big]\\ &= \vartheta\end{aligned}$$

für jedes $\vartheta\in\mathbb{N}$. Für $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ mit $0 = E_\vartheta\big(\psi(X_1,\dots,X_n)\big)$ für jedes $\vartheta\in\mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{x_1=1}^{\vartheta}\cdots\sum_{x_n=1}^{\vartheta}\psi(x_1,\dots,x_n)\\ &= \sum_{t=1}^{\vartheta}\Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ \max_{1\le\nu\le n}x_\nu=t}}\psi(x_1,\dots,x_n)\Bigg]\end{aligned}$$

für jedes $\vartheta\in\mathbb{N}$, woraus sukzessive durch Beachtung dieser Identität für $\vartheta = 1, \vartheta = 2,\dots$

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ \max_{1\le\nu\le n}x_\nu=t}}\psi(x_1,\dots,x_n) = 0$$

für jedes $t\in\mathbb{N}$ hergeleitet werden kann. Dies impliziert

$$\begin{aligned}&E_\vartheta\Bigg(\psi(X_1,\dots,X_n)\frac{(\max_{1\le\nu\le n}X_\nu)^{n+1}-(\max_{1\le\nu\le n}X_\nu-1)^{n+1}}{(\max_{1\le\nu\le n}X_\nu)^{n}-(\max_{1\le\nu\le n}X_\nu-1)^{n}}\Bigg)\\ &= \frac{1}{\vartheta^n}\sum_{x_1=1}^{\vartheta}\cdots\sum_{x_n=1}^{\vartheta}\psi(x_1,\dots,x_n)\frac{(\max_{1\le\nu\le n}x_\nu)^{n+1}-(\max_{1\le\nu\le n}x_\nu-1)^{n+1}}{(\max_{1\le\nu\le n}x_\nu)^{n}-(\max_{1\le\nu\le n}x_\nu-1)^{n}}\\ &= \frac{1}{\vartheta^n}\sum_{t=1}^{\vartheta}\frac{t^{n+1}-(t-1)^{n+1}}{t^n-(t-1)^n}\Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n\\ \max_{1\le\nu\le n}x_\nu=t}}\psi(x_1,\dots,x_n)\Bigg]\\ &= 0\end{aligned}$$

für jedes $\vartheta\in\mathbb{N}$.

3. a) X hat die Fourier-Transformierte

$$\varphi_X(z) = \exp\Big(i\mathbf{a}'z - \frac{\sigma^2}{2}|z|^2\Big),\quad z\in\mathbb{R}^n,$$

mit $\mathbf{a} = (a,\dots,a)'\in\mathbb{R}^n$. Es bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann hat $Y = BX$ bekanntlich die Fourier-Transformierte

$$\varphi_Y(z) = \varphi_X(B'z) = \exp\Big(i\mathbf{b}'z - \frac{\sigma^2}{2}|z|^2\Big),\quad z\in\mathbb{R}^n,$$

mit $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n)' = B\mathbf{a}$. Dies ist die Fourier-Transformierte von $Z = (Z_1,\dots,Z_n)$, wobei die $Z_1,\dots,Z_n$ unabhängig sind und $Z_j \sim N(b_j,\sigma^2)$ für $j = 1,\dots,n$ ist. Aus dem Eindeutigkeitssatz für Fourier-Transformierte folgt die behauptete Aussage.

b) Ohne Einschränkung kann $n \ge 2$ angenommen werden. Sei B eine orthogonale $(n\times n)$-Matrix mit der ersten Zeile $(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mit den Bezeichnungen und Ergebnissen aus Teil a) folgt, dass $Y_1 = \sqrt{n}\overline{X}$ unabhängig ist von $Y_2^2+\dots+Y_n^2 = \sum_{\nu=1}^n X_\nu^2 - Y_1^2 = nS^2$.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 23. April 2008

Übungsblatt 3 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. a) Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben $\mathfrak{R}(a, b)$-Verteilung, wobei $-\infty < a < b < +\infty$ unbekannt sind. Es sei $n \geq 2$. Stellen Sie mit Hilfe der Momentenmethode einen Schätzer für (a, b) auf. Ermitteln Sie den Wert dieses Schätzers für die nachfolgend genannten $n = 20$ Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von $X_1, \ldots, X_n$.

1.05	1.22	1.11	1.81	2.65	1.93	2.15	1.29	2.57	2.01
1.67	1.69	2.95	1.24	2.60	2.61	2.00	1.30	2.82	1.22

b) Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben Verteilungsfunktion

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(x-\mu)/\sigma)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ unbekannte Parameter sind. Stellen Sie mit Hilfe der Momentenmethode einen Schätzer für (μ, σ) auf.

Hinweis: Im Falle $\sigma = 1$ ist $\frac{\pi^2}{3}$ die Varianz der X_ν.

Ermitteln Sie den Wert dieses Schätzers für die nachfolgend genannten $n = 20$ Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von $X_1, \ldots, X_n$.

-0.95	1.74	0.61	-6.10	4.54	2.11	1.73	0.96	-1.31	-1.12
-1.79	0.19	1.15	-3.17	1.94	4.73	0.00	-2.39	3.83	5.85

2. a) Es sei $X \sim \mathfrak{B}(10, 1/3)$. Bestimmen Sie für $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ die p-Quantile von X.

b) Es sei $\xi_{1/4}(\mu, \sigma^2)$ bzw. $\xi_{3/4}(\mu, \sigma^2)$ das 1/4- bzw. das 3/4-Quantil der $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung. Für welche Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ ist $\xi_{3/4}(\mu, \sigma^2) - \xi_{1/4}(\mu, \sigma^2) = 1$?

(2+2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 30.04.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.04.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 3 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. a) Es ist $E_{(a,b)}(X_1) = \frac{a+b}{2}$ und $\mathrm{Var}_{(a,b)}(X_1) = (b-a)^2/12$. Es sei

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Die Momentenmethode führt auf den Schätzer $(\overline{X} - \sqrt{3S^2}, \overline{X} + \sqrt{3S^2})$ für (a, b). Der Wert des Momentenschätzers für die genannten Beobachtungen ist $(0.8280, 2.9610)$.

b) Es ist $\mu = E_{\mu,\sigma}(X_1)$ und $\mathrm{Var}_{\mu,\sigma}(X_1) = \sigma^2\pi^2/3$. Es sei

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Die Momentenmethode führt auf den Schätzer $(\overline{X}, \sqrt{3S^2/\pi^2})$ für (μ, σ). Der Wert des Momentenschätzers für die genannten Beobachtungen ist $(0.6275, 1.5640)$.

2. a) Es ist 2 bzw. 3 bzw. 4 das 1/4-bzw. 1/2- bzw. 3/4-Quantil von X.

b) Es ist $\xi_{1/4}(\mu, \sigma^2) = \sigma\xi_{1/4}(0, 1) + \mu = -\sigma\xi_{3/4}(0, 1) + \mu$ und $\xi_{3/4}(\mu, \sigma^2) = \sigma\xi_{3/4}(0, 1) + \mu$. Hieraus folgt

$$\xi_{3/4}(\mu, \sigma^2) - \xi_{1/4}(\mu, \sigma^2) = 2\sigma\xi_{3/4}(0, 1).$$

Es ist also $\xi_{3/4}(\mu, \sigma^2) - \xi_{1/4}(\mu, \sigma^2) = 1$ für alle $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilungen mit $\sigma = 1/(2\xi_{3/4}(0, 1)) \approx 0.7413011$.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.4.2008

Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Bestimmen Sie für die nachfolgenden 11 Werte

2.4 1.9 3.8 9.2 2.5 18.5 3.0 4.2 6.3 7.8 6.6

das arithmetische Mittel, den empirischen Median, die empirische Varianz und die empirischen Quartile, das sind das empirische 1/4-Quantil und das empirische 3/4-Quantil.

(4 Punkte)

2. Die nachfolgenden $n = 13$ Werte

23 32 34 65 87 69 76 90 59 58 73 71 62

sollen als Beobachtungen von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit der Dichte

$$\frac{1}{2\sigma}\exp(-|x-\mu|/\sigma), \; -\infty < x < +\infty,$$

$\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ unbekannte Parameter, aufgefasst werden können. Bestimmen Sie Schätzwerte für μ und σ mit Hilfe von geeigneten empirischen Quantilen.

(4 Punkte)

3. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ reelle, unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben Verteilungsfunktion F. Es seien $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ die nach wachsender Größe geordneten $X_1, \ldots, X_n$.

a) Zeigen Sie für jedes $j = 1, \ldots, n$ und jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$P(X_{(j)} \leq x) = (n-j+1)\binom{n}{j-1}\int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,dt.$$

Hinweis: Beachten Sie die Übungsaufgabe 34 von Blatt 5 zur Vorlesung *Stochastik A* im WS 2007/08.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeigen Sie: Jeder Median von X_1 ist Median von $X_{(\frac{n+1}{2})}$ (d.h. $X_{(\frac{n+1}{2})}$ ist ein mediantreuer Schätzer für den Median der Zufallsvariablen X_1).

(4+4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 07.05.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.04.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 3 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Das arithmetische Mittel ist 6.018182, der empirische Median ist 4.2, die empirische Varianz ist 20.84331, das 1/4-Quantil ist 2.5, das 3/4-Quantil ist 7.8.

2. Es ist

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\big((x-\mu)/\sigma\big), & x \le \mu, \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\big(-(x-\mu)/\sigma\big), & x > \mu. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich leicht ablesen, daß μ der Median und $\mu + \sigma \log 2$ das 3/4-Quantil der Verteilung der X_ν ist. Mit dem empirischen Median $\xi_{n,1/2}$ als Schätzer für μ und dem empirischen 3/4-Quantil $\xi_{n,3/4}$ als Schätzer für $\mu + \sigma\log 2$ ergibt sich der Schätzer $(\xi_{n,1/2}, \frac{\xi_{n,3/4}-\xi_{n,1/2}}{\log 2})$ für (μ,σ). Die genannten Beobachtungen liefern für (μ,σ) den Schätzwert $(65, 11.54156)$.

3. a) Wegen $\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \sim \mathfrak{B}\big(n, F(x)\big)$ ist

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} \le x) &= P\Big(\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \ge j\Big) \\ &= 1 - P\Big(\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \le j-1\Big) \\ &= 1 - (n-j+1)\binom{n}{j-1}\int_{F(x)}^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,dt \\ &= (n-j+1)\binom{n}{j-1}\int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,dt. \end{aligned}$$

b) Es sei $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$, und ξ Median von X. Es ist $F(\xi) \ge 1/2$ und $F(\xi-) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} F(\xi-\epsilon) \le 1/2$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} P(X_{(m+1)} \le x) &= (m+1)\binom{2m+1}{m}\int_0^{F(\xi)} t^m(1-t)^m\,dt \\ &\ge \frac{(2m+1)!}{m!m!}\int_0^{1/2} t^m(1-t)^m\,dt \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(X_{(m+1)} < x) &= (m+1)\binom{2m+1}{m}\int_0^{F(\xi-)} t^m(1-t)^m\,dt \\ &\le \frac{(2m+1)!}{m!m!}\int_0^{1/2} t^m(1-t)^m\,dt \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 7.5.2008

Übungsblatt 5 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$ seien unabhängig und je $N(2,3)$−verteilt. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung des empirischen Medians dieser Variablen vom Median der $N(2,3)$-Verteilung kleiner als 1/10 ist.

(4 Punkte)

2. Bestimmen Sie die Information $I_X(\vartheta)$ aus X über ϑ im Fall

a) $X \sim N(\vartheta, \sigma)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt, $\sigma^2 > 0$ bekannt.

b) $X \sim \mathfrak{B}(n, \vartheta)$, $\vartheta \in (0,1)$ unbekannt, $n \in \mathbb{N}$ bekannt.

c) $X \sim \mathfrak{P}(\vartheta)$, $\vartheta \in (0,\infty)$ unbekannt.

d) $X \sim \mathrm{Nb}(r, \vartheta)$ auf $\mathbb{N}_0$, $\vartheta \in (0,1)$ unbekannt, $r \in \mathbb{N}$ bekannt.

e) $X \sim \mathrm{Exp}(\vartheta)$, $\vartheta \in (0,\infty)$ unbekannt.

(2+2+2+2+2 Punkte)

3. Es sei $X \sim \mathrm{Nb}(1,p)$ auf $\mathbb{N}_0$, wobei $p = \frac{1}{2}$ oder $p = \frac{3}{4}$ sein kann. Es sei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Verwerfungsbereiche von Likelihood-Quotiententests für das Testproblem

$$H: p = \frac{1}{2}, \ K: p = \frac{3}{4}$$

durch

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{\{0, 1, \ldots, a\}: a \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{N}_0\}$$

gegeben ist.

b) Es sei $C \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie:

$$P_{\frac{1}{2}}(X \in C) \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad C = \emptyset .$$

Wie beurteilen Sie dieses Ergebnis? Welchen Test würden Sie für das in Teil a) gestellte Testproblem vorschlagen?

(2+2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 14.05.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 21.05.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 5 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Mit ξ_n als empirischem Median von reellen, unabhängigen, je $N(2,3)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ ist $\sqrt{n}(\xi_n-2)\xrightarrow{v} N(0,\frac{3}{2}\pi)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
P(|\xi_{100}-2|<1/10) &= P(\sqrt{100}|\xi_{100}-2|<1)\\
&\approx \Phi(\sqrt{\frac{2}{3\pi}})-\Phi(-\sqrt{\frac{2}{3\pi}})\\
&= 2\Phi(\sqrt{\frac{2}{3\pi}})-1\\
&\approx 0.3549566.
\end{aligned}$$

2. a) σ^{-2}, b) $\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}$, c) ϑ^{-1}, d) $\frac{r}{\vartheta^2(1-\vartheta)}$, e) ϑ^{-2}.

3. a) Betrachte den Quotienten

$$\frac{P_{\frac{3}{4}}(X=x)}{P_{\frac{1}{2}}(X=x)}=\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^x}=3\cdot 2^{-(x+1)}.$$

Die Menge der Verwerfungsbereiche ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \big\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ 3\cdot 2^{-(x+1)}>c\};\ c\geq 0\big\}\\
&= \big\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ -(x+1)\log 2>\log c-\log 3\};\ c\geq 0\big\}\\
&= \Big\{\Big\{x\in\mathbb{N}_0;\ x+1<\frac{\log 3-\log c}{\log 2}\Big\};\ c\geq 0\Big\}\\
&= \big\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ x<a\};\ a\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}\big\}.
\end{aligned}$$

(b) Für $a=\infty$ gilt $P_{\frac{1}{2}}(X\leq\infty)=1$. Für $a\in\mathbb{N}_0$ ist wegen $\alpha<1/2$

$$P_{\frac{1}{2}}(X\leq a)=\sum_{x=0}^{a}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1}\geq\frac{1}{2}>\alpha.$$

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 21.5.2008

Übungsblatt 6 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. $n = 12$ Patienten werden mit einem neuen Medikament, das die unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ hat, behandelt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p_0 eines älteren Medikaments sei $p_0 = 3/4$. Prüfen Sie unter Heranziehung eines geeigneten statistischen Tests für das Testproblem

$$H: \ p \leq p_0, \ K: \ p > p_0,$$

ob

(1) beim Testniveau $\alpha = 0.1$ eine beobachtete Anzahl von 7 geheilten Patienten,

(2) beim Testniveau $\alpha = 0.05$ eine beobachtete Anzahl von 11 geheilten Patienten,

(3) beim Testniveau $\alpha = 0.01$ eine beobachtete Anzahl von 11 geheilten Patienten

mit der Hypothese vereinbar ist. Skizzieren Sie in den drei Fällen den Verlauf der Gütefunktion des Tests.

(4 Punkte)

2. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit unabhängigen Zufallsvariablen X_ν, je mit derselben $\mathfrak{P}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Es sei $\lambda_0 \in (0, \infty)$ gegeben.

a) Stellen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Testniveau $\alpha \in (0,1)$ für das Testproblem

$$H: \ \lambda \leq \lambda_0, \ K: \lambda > \lambda_0$$

auf. Welchen approximativen Test schlagen Sie bei großen Werten von n vor? Schlagen Sie außerdem ein approximatives Verfahren zur Berechnung der Gütefunktion des Tests vor.

b) Die Radioaktivität einer Substanz wird mit Hilfe eines Zählrohrs $n = 10$ mal unabhängig gemessen. Es werde angenommen, daß die jeweils gezählten Impulse

112 107 81 104 101 93 111 82 107 110

als Beobachtungen von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, je mit derselben $\mathfrak{P}(\lambda)$-Verteilung aufgefaßt werden können, wobei λ ein unbekannter Parameter ist, der proportional zur Aktivität der Probe ist. Der Proportionalitätsfaktor ist bekannt. Die Frage, ob die Aktivität der Probe einen bestimmten, dem Parameterwert $\lambda_0 = 75$ entsprechenden Wert nicht übersteigt, soll mit Hilfe eines statistischen Tests für das Testproblem

$$H: \ \lambda \leq 75, \ K: \ \lambda > 75$$

beantwortet werden. Sind die gemessenen Werte bei einem Testniveau $\alpha = 0.05$ mit der Hypothese vereinbar? Skizzieren Sie den Verlauf der Gütefunktion des Tests und vergleichen Sie diesen mit dem Verlauf der Gütefunktion des approximativen Tests.

(4+4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 28.05.2008, vor der Vorlesung

Leibniz Universität Hannover

Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 28.05.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 6 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Zu den gegebenen Testniveaus wird jeweils der gleichmäßig beste Test zur Behandlung des Testproblems herangezogen.

Die Hypothese wird verworfen, falls die Beobachtung größer ist als das $(1-\alpha)$-Quantil $\mathfrak{B}(12, 3/4)_{1-\alpha}$ der $\mathfrak{B}(12, 3/4)$-Verteilung.

(1) $\mathfrak{B}(12, 3/4)_{0.9} = 11$. Die Beobachtung ist beim Testniveau 0.1 mit der Hypothese vereinbar.

(2) $\mathfrak{B}(12, 3/4)_{0.95} = 11$. Mit $X \sim \mathfrak{B}(12, 3/4)$ ist $\gamma = \frac{\alpha - P(X>11)}{P(X=11)} = 0.1446161$. Die Entscheidung, ob die Hypothese zu verwerfen ist oder nicht, erfolgt nach Beobachtung einer $\mathfrak{B}(1, 0.1446161)$-verteilten Zufallsvariable R. Verwerfung der Hypothese erfolgt, wenn für R der Wert 1 beobachtet wird.

(3) $\mathfrak{B}(12, 3/4)_{0.99} = 12$. Die Beobachtung ist beim Testniveau 0.01 mit der Hypothese vereinbar.

Graphische Darstellungen der Gütefunktionen des jeweils gleichmäßig besten Tests zu den gegebenen Testniveaus geben die nachfolgenden Bilder. Zum Vergleich sind auch die Graphen der durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten approximativen Gütefunktionen wiedergegeben.

Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.05

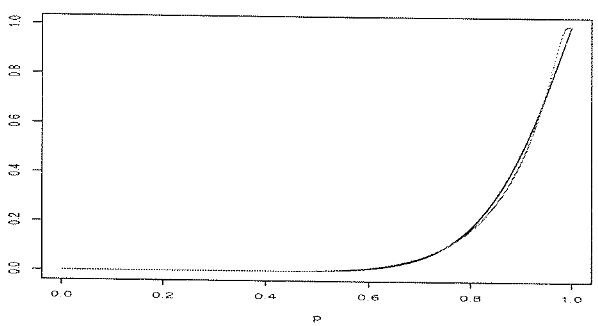


Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.05

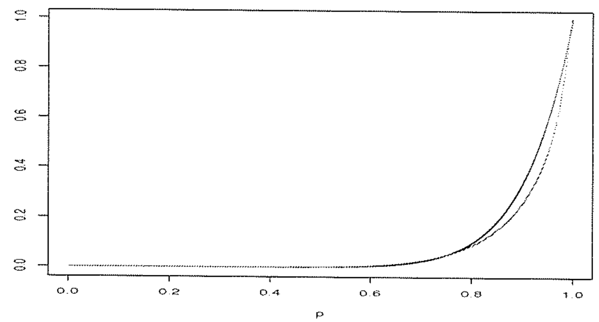
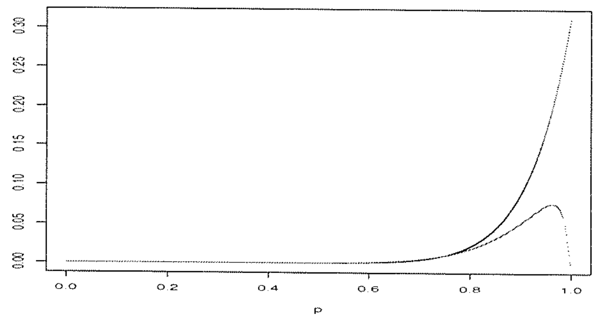


Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.01



2. a) Mit

$$\begin{aligned} f(x,\lambda) &= P_\lambda(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \frac{1}{x_1! \ldots x_n!} \exp(-n\lambda)\lambda^{x_1+\cdots+x_n} \end{aligned}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $\lambda > 0$ ist für $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ und eine Konstante $k > 0$

$$\frac{f(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_0)} = \exp\big(-n(\lambda_1 - \lambda_0)\big)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{x_1+\cdots+x_n} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} k$$

genau dann, wenn

$$x_1 + \cdots + x_n \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} c$$

mit einer passenden Konstante c ist. Es ist $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathfrak{P}(n\lambda)$, wenn λ der zugrunde liegende Parameter ist. Wählen wir $c \in \mathbb{N}_0$ als $(1-\alpha)$-Quantil der $\mathfrak{P}(n\lambda_0)$-Verteilung, $\gamma = 0$ im Fall $P_{\lambda_0}(X_1 + \cdots + X_n > c) = \alpha$ und $\gamma = \frac{\alpha - P_{\lambda_0}(X_1+\cdots+X_n>c)}{P_{\lambda_0}(X_1+\cdots+X_n=c)}$ sonst, so ist

$$\phi(X) = \begin{cases} 1, & X_1 + \cdots + X_n > c, \\ \gamma, & X_1 + \cdots + X_n = c, \\ 0, & X_1 + \cdots + X_n < c, \end{cases}$$

ein bester Test zum Testniveau $\alpha \in (0,1)$ für das einfache Testproblem $H : \lambda = \lambda_0$, $K : \lambda = \lambda_1$. Da dieser Test nicht vom Paramter $\lambda_1 > \lambda_0$ abhängt, ist er auch gleichmäßig bester Test für das Testproblem $H : \lambda = \lambda_0$, $K : \lambda > \lambda_0$. Es ist

$$\begin{aligned} E_\lambda(\phi(X)) &= P_\lambda(X_1 + \cdots + X_n > c) + \gamma P_\lambda(X_1 + \cdots + X_n = c) \\ &= \sum_{k=c+1}^{\infty} \exp(-\mu)\frac{\mu^k}{k!} + \gamma \exp(-\mu)\frac{\mu^c}{c!} =: g(\mu) \end{aligned}$$

mit $\mu = n\lambda$. Es ist $g'(\mu) > 0$, also g eine streng monoton wachsende Funktion von $\mu > 0$. Wegen $g(n\lambda_0) = \alpha$ ist daher $\phi(X)$ ein gleichmäßig bester Test zum Testniveau α. Ein geeigneter approximativer Test ist

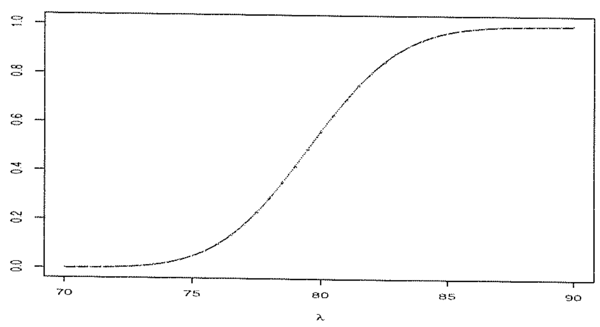
$$\tilde{\phi}(X_1, \ldots, X_n) = I\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\alpha}\right).$$

Eine in der Regel für große Werte von n brauchbare Approximation für die Gütefunktion von $\phi(X)$ und $\tilde{\varphi}(X)$ ist

$$1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda - \lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

b) Das 0.95-Quantil der $\mathfrak{P}(750)$-Verteilung ist 795. Die Summe der beobachteten Impulse ist 1008. Die Hypothese wird verworfen. Eine graphische Darstellung der exakten und approximativen Gütefunktion des gleichmäßig besten Tests und des approximativen Tests gibt das nachfolgende Bild.

Abb. 4 Gütefunktion des gleichmäßig besten Tests (durchgezogene Linie), des approximativen Tests (gepunktete rote Linie) und approximative Gütefunktion (gepunktete grüne Linie)



Quantile $t_{n;\gamma}$ der t_n-Verteilung

Quantile $t_{n;}$ γ , der t_n-Verteilung

$$\gamma = \int_{-\infty}^{t_{n;\gamma}} f_n(x)\, dx, \quad \gamma \in (0,1)$$

$$\text{mit } f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \; x \in \mathbb{R}, \text{ als Dichte der } t_n\text{-Verteilung.}$$

Es ist $t_{n;\gamma} = -t_{n;1-\gamma}$. Für große Werte von n kann $t_{n;\gamma}$ durch das γ-Quantil $u_\gamma = t_{\infty;\gamma}$ der Standard-Normalverteilung ersetzt werden.

	γ				
n	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7470	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874

n	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430

n	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950
76	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	1.2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	1.2905	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286
96	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	1.2902	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758