Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 17. April 2006

Lösungen der Aufgaben von Blatt 1 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2006

1. a) Für eine Beobachtung $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ von X ist

$$P_\vartheta(X = x) = \frac{1}{\vartheta^n} I(\max_{1 \le \nu \le n} \le \vartheta)$$

und daher $\hat{\vartheta}(x) = \max_{1 \le \nu \le n} x_\nu$ Maximmum-Likelihood Schätzwert für ϑ.

b) Für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ und jedes $0 < \epsilon < 1$ ist

$$P_\vartheta(|\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = P_\vartheta(\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu \le \vartheta - \epsilon) = \big(P(X_1 \le \vartheta - 1)\big)^n = \big(\frac{\vartheta - 1}{\vartheta}\big)^n,$$

also $\lim_{n \to \infty} P_\vartheta(|\max_{1 \le \nu \le n} X_\nu - \vartheta| > \epsilon) = 0$.

2. Es ist für jedes $a \in \mathbb{N}, a \ge n + r$

$$P_a(X = 0) = \frac{(a - r)(a - r - 1) \ldots (a - r - n + 1)}{a(a - 1) \ldots (a - n + 1)} < 1,$$

so dass wegen

$$\sup_{a \in \mathbb{N}, a \ge n + r} P_a(X = 0) = 1$$

kein Maximum-Likelihood Schätzwert existiert.

3. a) Für jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Ableitung der Log-Likelihoodfunktion

$$h(\vartheta) = n - 2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\exp\big(-(x_\nu - \vartheta)\big)}{1 + \exp\big(-(x_\nu - \vartheta)\big)}, \ \vartheta \in \mathbb{R},$$

streng monoton fallend. Ferner ist

$$\lim_{\vartheta \to -\infty} h(\vartheta) = n \text{ und } \lim_{\vartheta \to \infty} h(\vartheta) = -n.$$

b) Ein numerisches Verfahren liefert bei Einsetzung der gegebenen Werte für die Ableitung der Log-Likelihoodfunktion die (approximative) Nullstelle -0.267.

Leibniz Universität Hannover Hannover, 30.10.2007
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 2 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. Für $d : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{R}$ mit $E_\lambda\big(|d(X_1, \dots, X_n)|^2\big) < \infty$ für jedes $\lambda > 0$ ist

$$0 = E_\lambda\big(d(X_1, \dots, X_n)\big) \quad \text{für jedes} \quad \lambda > 0$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} d(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_1! \dots x_n!} \lambda^{x_1+\cdots+x_n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ x_1+\cdots+x_n=k}} d(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_1! \dots x_n!} \Bigg] \lambda^k \end{aligned}$$

für jedes $\lambda > 0$ ist. Letzteres trifft genau dann zu, wenn

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ x_1+\cdots+x_n=k}} d(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_1! \dots x_n!} = 0$$

ist. Dies impliziert

$$\begin{aligned} & E_\lambda\big(d(X_1, \dots, X_n)\overline{X}\big) \\ =\ & \exp(-n\lambda) \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} d(x_1, \dots, x_n) \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \frac{1}{x_1! \dots x_n!} \lambda^{x_1+\cdots+x_n} \\ =\ & \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ x_1+\cdots+x_n=k}} d(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{x_1! \dots x_n!} \Bigg] \lambda^k \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

für jedes $\lambda > 0$, so dass mit dem Kovarianzkriterium von Rao die Behauptung folgt.

2. a) Es ist

$$\begin{aligned} P_\vartheta(M = k) &= P_\vartheta(M \le k) - P_\vartheta(M \le k - 1) \\ &= \frac{1}{\vartheta^n} \Big[k^n - (k-1)^n \Big], \ k \in \{1, \dots, \vartheta\}, \vartheta \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} E_\vartheta\big(d(M)\big) &= \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \frac{1}{\vartheta^n} \Big[k^n - (k-1)^n \Big] \\ &= \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{1}{\vartheta^n} \Big[k^{n+1} - (k-1)^{n+1} \Big] \\ &= \vartheta \end{aligned}$$

für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$. Für $\psi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ mit $0 = E_\vartheta\big(\psi(X_1, \dots, X_n)\big)$ für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x_1=1}^{\vartheta} \cdots \sum_{x_n=1}^{\vartheta} \psi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{t=1}^{\vartheta} \Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ \max_{1\le\nu\le n} x_\nu = t}} \psi(x_1, \dots, x_n) \Bigg] \end{aligned}$$

für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$, woraus sukzessive durch Beachtung dieser Identität für $\vartheta = 1, \vartheta = 2, \dots$

$$\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ \max_{1\le\nu\le n} x_\nu = t}} \psi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

für jedes $t \in \mathbb{N}$ hergeleitet werden kann. Dies impliziert

$$\begin{aligned} &E_\vartheta\left(\psi(X_1, \dots, X_n) \frac{(\max_{1\le\nu\le n} X_\nu)^{n+1} - (\max_{1\le\nu\le n} X_\nu - 1)^{n+1}}{(\max_{1\le\nu\le n} X_\nu)^{n} - (\max_{1\le\nu\le n} X_\nu - 1)^{n}} \right) \\ &= \frac{1}{\vartheta^n} \sum_{x_1=1}^{\vartheta} \cdots \sum_{x_n=1}^{\vartheta} \psi(x_1, \dots, x_n) \frac{(\max_{1\le\nu\le n} x_\nu)^{n+1} - (\max_{1\le\nu\le n} x_\nu - 1)^{n+1}}{(\max_{1\le\nu\le n} x_\nu)^{n} - (\max_{1\le\nu\le n} x_\nu - 1)^{n}} \\ &= \frac{1}{\vartheta^n} \sum_{t=1}^{\vartheta} \frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{t^n - (t-1)^n} \Bigg[\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}_0^n \\ \max_{1\le\nu\le n} x_\nu = t}} \psi(x_1, \dots, x_n) \Bigg] \\ &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$.

3. a) X hat die Fourier-Transformierte

$$\varphi_X(z) = \exp\Big(i\mathbf{a}'z - \frac{\sigma^2}{2}|z|^2 \Big), \; z \in \mathbb{R}^n,$$

mit $\mathbf{a} = (a, \dots, a)' \in \mathbb{R}^n$. Es bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann hat $Y = BX$ bekanntlich die Fourier-Transformierte

$$\varphi_Y(z) = \varphi_X(B'z) = \exp\Big(i\mathbf{b}'z - \frac{\sigma^2}{2}|z|^2 \Big), \; z \in \mathbb{R}^n,$$

mit $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)' = B\mathbf{a}$. Dies ist die Fourier-Transformierte von $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, wobei die $Z_1, \dots, Z_n$ unabhängig sind und $Z_j \sim N(b_j, \sigma^2)$ für $j = 1, \dots, n$ ist. Aus dem Eindeutigkeitssatz für Fourier-Transformierte folgt die behauptete Aussage.

b) Ohne Einschränkung kann $n \ge 2$ angenommen werden. Sei B eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix mit der ersten Zeile $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Mit den Bezeichnungen und Ergebnissen aus Teil a) folgt, dass $Y_1 = \sqrt{n}\overline{X}$ unabhängig ist von $Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = \sum_{\nu=1}^n X_\nu^2 - Y_1^2 = nS^2$.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.04.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 3 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. a) Es ist $E_{(a,b)}(X_1) = \frac{a+b}{2}$ und $\mathrm{Var}_{(a,b)}(X_1) = (b-a)^2/12$. Es sei

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,\ \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Die Momentenmethode führt auf den Schätzer $(\overline{X} - \sqrt{3S^2}, \overline{X} + \sqrt{3S^2})$ für (a,b). Der Wert des Momentenschätzers für die genannten Beobachtungen ist $(0.8280, 2.9610)$.

b) Es ist $\mu = E_{\mu,\sigma}(X_1)$ und $\mathrm{Var}_{\mu,\sigma}(X_1) = \sigma^2\pi^2/3$. Es sei

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,\ \ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2.$$

Die Momentenmethode führt auf den Schätzer $(\overline{X}, \sqrt{3S^2/\pi^2})$ für (μ,σ). Der Wert des Momentenschätzers für die genannten Beobachtungen ist $(0.6275, 1.5640)$.

2. a) Es ist 2 bzw. 3 bzw. 4 das 1/4-bzw. 1/2- bzw. 3/4-Quantil von X.

b) Es ist $\xi_{1/4}(\mu,\sigma^2) = \sigma\xi_{1/4}(0,1) + \mu = -\sigma\xi_{3/4}(0,1) + \mu$ und $\xi_{3/4}(\mu,\sigma^2) = \sigma\xi_{3/4}(0,1) + \mu$. Hieraus folgt

$$\xi_{3/4}(\mu,\sigma^2) - \xi_{1/4}(\mu,\sigma^2) = 2\sigma\xi_{3/4}(0,1).$$

Es ist also $\xi_{3/4}(\mu,\sigma^2) - \xi_{1/4}(\mu,\sigma^2) = 1$ für alle $N(\mu,\sigma^2)$-Verteilungen mit $\sigma = 1/(2\xi_{3/4}(0,1)) \approx 0.7413011$.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 30.04.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 3 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Das arithmetische Mittel ist 6.018182, der empirische Median ist 4.2, die empirische Varianz ist 20.84331, das 1/4-Quantil ist 2.5, das 3/4-Quantil ist 7.8.

2. Es ist

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\big((x-\mu)/\sigma\big), & x \le \mu, \\ 1-\frac{1}{2}\exp\big(-(x-\mu)/\sigma\big), & x > \mu. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich leicht ablesen, daß μ der Median und $\mu + \sigma \log 2$ das 3/4-Quantil der Verteilung der X_ν ist. Mit dem empirischen Median $\xi_{n,1/2}$ als Schätzer für μ und dem empirischen 3/4-Quantil $\xi_{n,3/4}$ als Schätzer für $\mu + \sigma \log 2$ ergibt sich der Schätzer $(\xi_{n,1/2}, \frac{\xi_{n,3/4}-\xi_{n,1/2}}{\log 2})$ für (μ,σ). Die genannten Beobachtungen liefern für (μ,σ) den Schätzwert $(65, 11.54156)$.

3. a) Wegen $\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \sim \mathfrak{B}\big(n, F(x)\big)$ ist

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} \le x) &= P(\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \ge j) \\ &= 1 - P(\sum_{k=1}^n I(X_k \le x) \le j-1) \\ &= 1 - (n-j+1)\binom{n}{j-1}\int_{F(x)}^1 t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,dt \\ &= (n-j+1)\binom{n}{j-1}\int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,dt. \end{aligned}$$

b) Es sei $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$, und ξ Median von X. Es ist $F(\xi) \ge 1/2$ und $F(\xi-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(\xi - \epsilon) \le 1/2$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} P(X_{(m+1)} \le x) &= (m+1)\binom{2m+1}{m}\int_0^{F(\xi)} t^m(1-t)^m\,dt \\ &\ge \frac{(2m+1)!}{m!m!}\int_0^{1/2} t^m(1-t)^m\,dt \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(X_{(m+1)} < x) &= (m+1)\binom{2m+1}{m}\int_0^{F(\xi-)} t^m(1-t)^m\,dt \\ &\le \frac{(2m+1)!}{m!m!}\int_0^{1/2} t^m(1-t)^m\,dt \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 21.05.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 5 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Mit ξ_n als empirischem Median von reellen, unabhängigen, je $N(2,3)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ ist $\sqrt{n}(\xi_n-2)\xrightarrow{v}N(0,\frac{3}{2}\pi)$. Somit ist

$$\begin{aligned}P(|\xi_{100}-2|<1/10) &= P(\sqrt{100}|\xi_{100}-2|<1)\\ &\approx \Phi(\sqrt{\frac{2}{3\pi}})-\Phi(-\sqrt{\frac{2}{3\pi}})\\ &= 2\Phi(\sqrt{\frac{2}{3\pi}})-1\\ &\approx 0.3549566.\end{aligned}$$

2. a) σ^{-2}, b) $\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}$, c) ϑ^{-1}, d) $\frac{r}{\vartheta^2(1-\vartheta)}$, e) ϑ^{-2}.

3. a) Betrachte den Quotienten

$$\frac{P_{\frac{3}{4}}(X=x)}{P_{\frac{1}{2}}(X=x)}=\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^x}=3\cdot 2^{-(x+1)}.$$

Die Menge der Verwerfungsbereiche ist

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \left\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ 3\cdot 2^{-(x+1)}>c\};\ c\ge 0\right\}\\ &= \left\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ -(x+1)\log 2>\log c-\log 3\};\ c\ge 0\right\}\\ &= \left\{\left\{x\in\mathbb{N}_0;\ x+1<\frac{\log 3-\log c}{\log 2}\right\};\ c\ge 0\right\}\\ &= \left\{\{x\in\mathbb{N}_0;\ x<a\};\ a\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}\right\}.\end{aligned}$$

(b) Für $a=\infty$ gilt $P_{\frac{1}{2}}(X\le\infty)=1$. Für $a\in\mathbb{N}_0$ ist wegen $\alpha<1/2$

$$P_{\frac{1}{2}}(X\le a)=\sum_{x=0}^{a}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{a+1}\ge\frac{1}{2}>\alpha.$$

Leibniz Universität Hannover Hannover, 28.05.2008
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 6 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Zu den gegebenen Testniveaus wird jeweils der gleichmäßig beste Test zur Behandlung des Testproblems herangezogen.

Die Hypothese wird verworfen, falls die Beobachtung größer ist als das $(1-\alpha)$-Quantil $\mathfrak{B}(12,3/4)_{1-\alpha}$ der $\mathfrak{B}(12,3/4)$-Verteilung.

(1) $\mathfrak{B}(12,3/4)_{0.9} = 11$. Die Beobachtung ist beim Testniveau 0.1 mit der Hypothese vereinbar.

(2) $\mathfrak{B}(12,3/4)_{0.95} = 11$. Mit $X \sim \mathfrak{B}(12,3/4)$ ist $\gamma = \frac{\alpha - P(X>11)}{P(X=11)} = 0.1446161$. Die Entscheidung, ob die Hypothese zu verwerfen ist oder nicht, erfolgt nach Beobachtung einer $\mathfrak{B}(1,0.1446161)$-verteilten Zufallsvariable R. Verwerfung der Hypothese erfolgt, wenn für R der Wert 1 beobachtet wird.

(3) $\mathfrak{B}(12,3/4)_{0.99} = 12$. Die Beobachtung ist beim Testniveau 0.01 mit der Hypothese vereinbar.

Graphische Darstellungen der Gütefunktionen des jeweils gleichmäßig besten Tests zu den gegebenen Testniveaus geben die nachfolgenden Bilder. Zum Vergleich sind auch die Graphen der durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten approximativen Gütefunktionen wiedergegeben.

Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.05

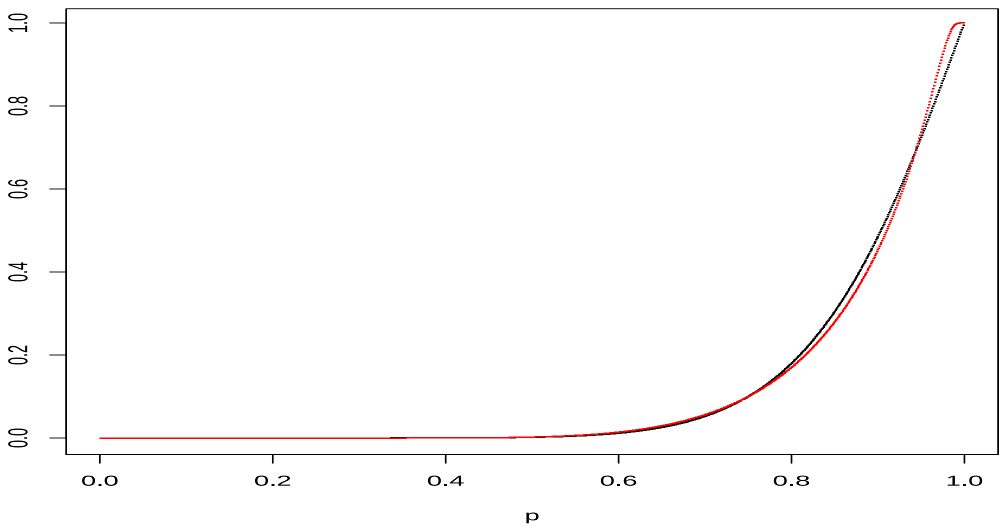


Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.05

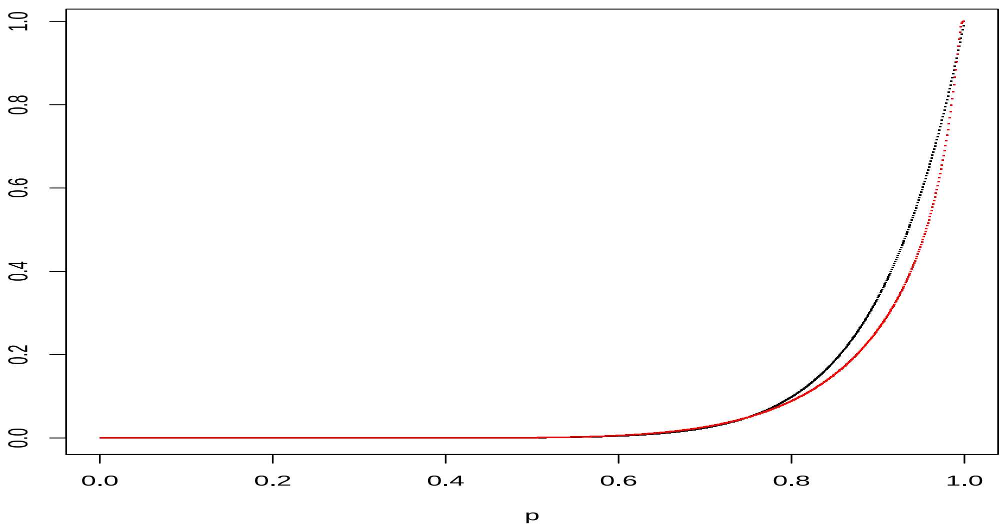
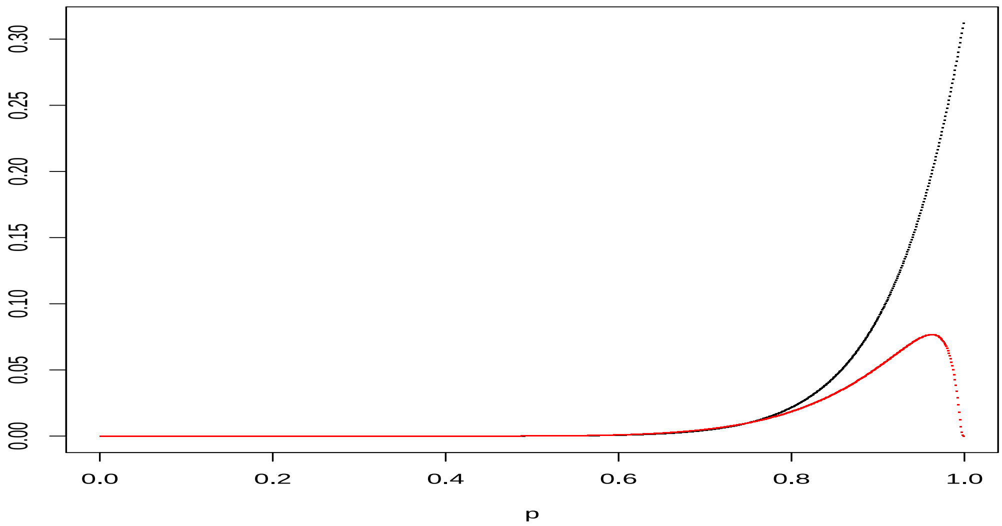


Abb. 1 Exakte (schwarz) und approximative (rot) Gütefunktion; Testniveau 0.01



2. a) Mit

$$
\begin{aligned}
f(x, \lambda) &= P_\lambda(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \frac{1}{x_1! \ldots x_n!} \exp(-n\lambda) \lambda^{x_1 + \cdots + x_n}
\end{aligned}
$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $\lambda > 0$ ist für $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ und eine Konstante $k > 0$

$$
\frac{f(x, \lambda_1)}{f(x, \lambda_0)} = \exp\bigl(-n(\lambda_1 - \lambda_0)\bigr) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{x_1 + \cdots + x_n} \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} k
$$

genau dann, wenn

$$
x_1 + \cdots + x_n \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} c
$$

mit einer passenden Konstante c ist. Es ist $X_1 + \dots + X_n \sim \mathfrak{P}(n\lambda)$, wenn λ der zugrunde liegende Parameter ist. Wählen wir $c \in \mathbb{N}_0$ als $(1-\alpha)$-Quantil der $\mathfrak{P}(n\lambda_0)$-Verteilung, $\gamma = 0$ im Fall $P_{\lambda_0}(X_1 + \dots + X_n > c) = \alpha$ und $\gamma = \frac{\alpha - P_{\lambda_0}(X_1 + \dots + X_n > c)}{P_{\lambda_0}(X_1 + \dots + X_n = c)}$ sonst, so ist

$$\phi(X) = \begin{cases} 1, & X_1 + \dots + X_n > c, \\ \gamma, & X_1 + \dots + X_n = c, \\ 0, & X_1 + \dots + X_n < c, \end{cases}$$

ein bester Test zum Testniveau $\alpha \in (0,1)$ für das einfache Testproblem $H : \lambda = \lambda_0,\ K : \lambda = \lambda_1$. Da dieser Test nicht vom Paramter $\lambda_1 > \lambda_0$ abhängt, ist er auch gleichmäßig bester Test für das Testproblem $H : \lambda = \lambda_0,\ K : \lambda > \lambda_0$. Es ist

$$\begin{aligned} E_\lambda\big(\phi(X)\big) &= P_\lambda(X_1 + \dots + X_n > c) + \gamma P_\lambda(X_1 + \dots + X_n = c) \\ &= \sum_{k=c+1}^{\infty} \exp(-\mu)\frac{\mu^k}{k!} + \gamma \exp(-\mu)\frac{\mu^c}{c!} =: g(\mu) \end{aligned}$$

mit $\mu = n\lambda$. Es ist $g'(\mu) > 0$, also g eine streng monoton wachsende Funktion von $\mu > 0$. Wegen $g(n\lambda_0) = \alpha$ ist daher $\phi(X)$ ein gleichmäßig bester Test zum Testniveau α. Ein geeigneter approximativer Test ist

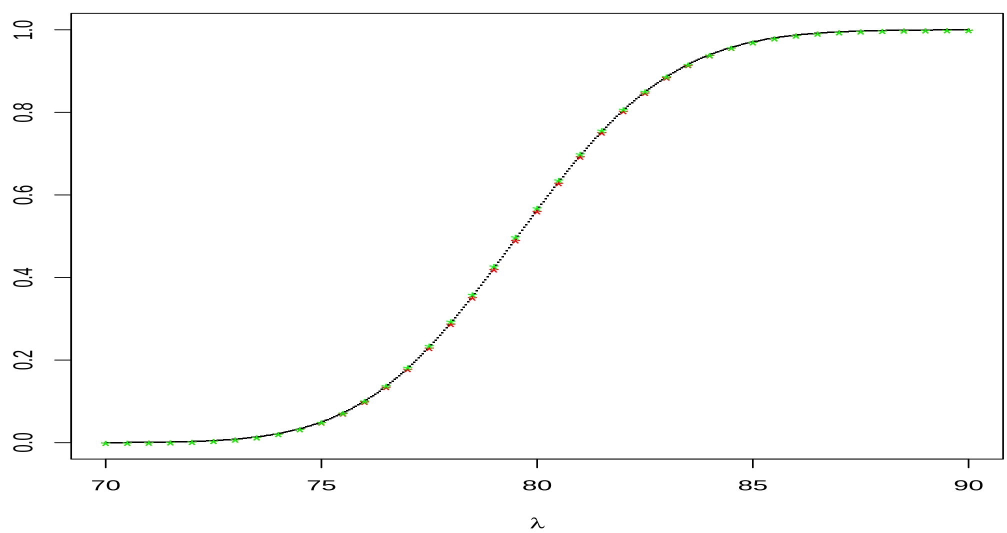
$$\tilde{\phi}(X_1, \dots, X_n) = I\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\alpha}\right).$$

Eine in der Regel für große Werte von n brauchbare Approximation für die Gütefunktion von $\phi(X)$ und $\tilde{\varphi}(X)$ ist

$$1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda - \lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

b) Das 0.95-Quantil der $\mathfrak{P}(750)$-Verteilung ist 795. Die Summe der beobachteten Impulse ist 1008. Die Hypothese wird verworfen. Eine graphische Darstellung der exakten und approximativen Gütefunktion des gleichmäßig besten Tests und des approximativen Tests gibt das nachfolgende Bild.

Abb. 4 Gütefunktion des gleichmäßig besten Tests (durchgezogene Linie), des approximativen Tests (gepunktete rote Linie) und approximative Gütefunktion (gepunktete grüne Linie)



Leibniz Universität Hannover Hannover, 05.06.2008
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 7 zur Vorlesung
Stochastik B
SS 2008

1. a) Es ist $S = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathfrak{P}(n\lambda)$ bei zugrunde liegendem Parameter $\lambda > 0$. In Anlehnung an den einseitigen Fall definieren wir

$$\begin{aligned}
c_1 &= \max\Big\{x \in \mathbb{N}_0; P_{\lambda_0}(S < x) \leq \frac{\alpha}{2}\Big\},\\
c_2 &= \min\Big\{x \in \mathbb{N}_0; P_{\lambda_0}(S > x) \leq \frac{\alpha}{2}\Big\},\\
\gamma_1 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S < c_1) = \frac{\alpha}{2},\\ \frac{\frac{\alpha}{2} - P_{\lambda_0}(S<c_1)}{P_{\lambda_0}(S=c_1)}, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S < c_1) < \frac{\alpha}{2},\end{cases}\\
\gamma_2 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S > c_2) = \frac{\alpha}{2},\\ \frac{\frac{\alpha}{2} - P_{\lambda_0}(S>c_2)}{P_{\lambda_0}(X=c_2)}, & \text{falls } P_{\lambda_0}(S > c_2) < \frac{\alpha}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Testfunktion

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & \text{falls } s < c_1 \text{ oder } s > c_2,\\ \gamma_1, & \text{falls } s = c_1,\\ \gamma_2, & \text{falls } s = c_2,\\ 0, & \text{falls } c_1 < s < c_2.\end{cases}$$

gilt $E_0\big(\varphi(S)\big) = \alpha$. Für große Werte von n bieten sich die durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten Approximationen

$$\begin{aligned}
c_1 &\approx n\lambda_0 + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0},\\
c_2 &\approx n\lambda_0 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n\lambda_0},\\
\gamma_1 &\approx 0,\\
\gamma_2 &\approx 0
\end{aligned}$$

an. Wegen $u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ führen diese auf den approximativen zweiseitigen Test

$$\tilde{\varphi}(X) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}},\\ 0, & \text{falls } \frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}.\end{cases}$$

Für die Gütefunktionen von $\varphi(S)$ und $\tilde{\varphi}(S)$ bietet sich ebenfalls die durch den zentralen

Grenzwertsatz begründete Approximation

$$\begin{aligned}
E_\lambda\big(\varphi(S)\big) &\approx E_\lambda\big(\tilde\varphi(S)\big)\\
&= P_\lambda\Big(\frac{|S-n\lambda_0|}{\sqrt{n\lambda_0}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)\\
&= P_\lambda\Big(\frac{S-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big)\\
&\quad + P_\lambda\Big(\frac{S-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big)\\
&\approx 1-\Phi\Big(u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big)\\
&\quad + \Phi\Big(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} - \sqrt{n}\frac{\lambda-\lambda_0}{\sqrt{\lambda}}\Big)
\end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ an.

b) Eine graphische Darstellung der Gütefunktionen des Tests im Fall $n = 10, \lambda_0 = 5, \alpha = 0.05$ gibt das nachfolgende Bild. Zum Vergleich ist auch der Graph der durch den zentralen Grenzwertsatz begründeten approximativen Gütefunktion wiedergegeben.

Für $\lambda = 4$ ist der Wert der Gütefunktion $E_4\big(\varphi(X)\big) = 0.3036350$ und 0.2709562 der approximative Wert. Für $\lambda = 5$ sind der Wert der Gütefunktion und der approximative Wert 0.05.

2. Mit

$$f(x,\lambda) = \lambda^n \exp\big(-\lambda(x_1+\cdots+x_n)\big)$$

für $x = (x_1,\ldots,x_n) \in (0,\infty)^n$ und $\lambda > 0$ ist für $\lambda = \lambda_1 < \lambda_0$ und eine Konstante $k > 0$

$$\frac{f(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_0)} = \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Big)^n \exp\big(-(\lambda_1-\lambda_0)(x_1+\cdots+x_n)\big) \left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\} k$$

genau dann, wenn

$$x_1+\cdots+x_n \left\{\begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array}\right\} c$$

mit einer passenden Konstante c ist. Es ist $X_1+\cdots+X_n \sim G(n,\lambda)$, wenn λ der zugrunde liegende Parameter ist. Dabei ist $G(n,\lambda)$ die *Gamma-Verteilung* oder *Erlang-Verteilung* mit den Parametern n und λ. Die Dichte dieser Verteilung ist

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}\exp(-\lambda x) \ \text{ für } x > 0 \ \text{ und } 0 \text{ sonst.}$$

Wählen wir $c \in (0,\infty)$ als $1-\alpha$-Quantil der $G(n,\lambda_0)$-Verteilung, so ist

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X_1+\cdots+X_n > c,\\ 0, & X_1+\cdots+X_n \le c,\end{cases}$$

ein bester Test zum Testniveau $\alpha \in (0,1)$ für das einfache Testproblem $H : \lambda = \lambda_0,\ K : \lambda = \lambda_1$. Da dieser Test nicht vom Paramter $\lambda_1 < \lambda_0$ abhängt, ist er auch gleichmäßig bester Test für das Testproblem $H : \lambda = \lambda_0,\ K : \lambda < \lambda_0$. Es ist

$$\begin{aligned} E_\lambda\big(\phi(X)\big) &= P_\lambda(X_1 + \cdots + X_n > c) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_c^\infty x^{n-1} \exp(-\lambda x)\, dx \end{aligned}$$

eine streng monoton wachsende Funktion von $\lambda > 0$, also $\varphi(X)$ ein gleichmäßiger bester Test zum Testniveau α für das genannte Testproblem.

b) Mit

$$m(\lambda) = 1/\lambda = E_\lambda(X_1)$$

als Erwartungswert von X_1 kann das Testproblem in Teil a) äquivalent in der Form

$$H : m(\lambda) \le m(\lambda_0),\ K : m(\lambda) > m(\lambda_0)$$

geschrieben werden. Formulieren wir die Behauptung des Herstellers als Alternative, so ist im hier vorliegenden Fall $n = 20$, $\lambda_0 = 1/3$ und 84.55281 das 0.9-Quantil der $G(n, \lambda_0)$-Verteilung. Die Summe der genannten Beobachtungswerte ist 53.55. Die Hypothese ist beim Testniveau 0.1 mit den gemachten Beobachtungen vereinbar.

3. Wir gehen davon aus, dass die Anzahl X der bei den $n = 487$ Kreuzungsversuchen sich ergebenden gelben Erbsen $\mathfrak{B}(n,p)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$ ist. Wir schlagen den approximativen zweiseitigen Binomialtest

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{|X - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_{1-\alpha/2} \\ 0, & \frac{|X - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \le u_{1-\alpha/2}, \end{cases}$$

zur Behandlung des Testproblems

$$H : p = p_0,\ K : p \ne p_0$$

mit $p_0 = \frac{3}{4}$ und $\alpha = 0.05$ vor. Mit dem beobachteten Wert 355 von X erhalten wir $\frac{|355 - 478\frac{3}{4}|}{\sqrt{478\frac{3}{4}\frac{1}{4}}} = 0.3697 < 1.96 = u_{0.975}$. Der Test führt beim Testniveau $\alpha = 0.05$ nicht zur Ablehnung der Hypothese.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 12.06.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 8 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Der Wert der t-Testgröße $\frac{\sqrt{n}|\overline{X}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (X_j-\overline{X})^2}}$ des zweiseitigen t-Tests für das Testproblem $H:\mu=0,\ K:\mu\neq 0$ ist 0.8368. Das 0.975-Quantil der t_{19}-Verteilung ist 2.0930. Die beobachteten Werte sind beim gewählten Testniveau 0.05 mit der Hypothese vereinbar.

2. Der Wert der Testgröße $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$ ist 0.2127. Es ist $\chi^2_{11;0.975}=21.9201$. Die Hypothese ist beim Testniveau $\alpha=0.025$ mit den Beobachtungen vereinbar.

3. Der Wert der t-Testgröße für die Steigung β der Regressionsgeraden (Hypothese $H:\beta\leq \lg 0.25$) ist 2.1343. Das 0.95-Quantil der t_3-Verteilung ist 2.3534. Beim Testniveau $\alpha=0.05$ ist die Hypothese mit den Beobachtungen vereinbar.

4. Es ist

$$X=(X_{11},\dots,X_{14},X_{21},\dots,X_{23},X_{31},\dots,X_{33})$$

und für $i\in\{1,2,3\}$

$$\overline{X}_{i\cdot}:=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

und

$$\overline{X}_{\cdot\cdot}:=\frac{1}{n_1+n_2+n_3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}.$$

Die F-Testgröße für für das Testproblem

$$\mathrm{H}: a_1=a_2=a_3$$

bei der einfachen Varianzanalyse ist

$$T(X)=\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 n_i(\overline{X}_{i\cdot}-\overline{X}_{\cdot\cdot})^2}{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}.$$

Wegen

$$T(X)\approx 2.297<4.74=F_{2,7;0.95}$$

wird die Hypothese H nicht verworfen.

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 18.06.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 9 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Es werde $(20, 30, 20, 25, 15, 10)$ als Beobachtung des $\mathfrak{M}(n, p_1, \ldots, p_6)$-verteilten Zufallsvektors $(X_1, \ldots, X_6)$ mit $n = 120$ aufgefasst. Die χ^2-Testgröße zur Prüfung der Hypothese $H : p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$, $T = \sum_{j=1}^{6} \frac{(X_j - n/6)^2}{n/6}$, hat den Wert 12.5. Das 0.95-Quantil der χ^2_5-Verteilung ist 11.07050. Die Hypothese wird verworfen.

2. Die χ^2-Testgröße für die Hypothese der Unabhängigkeit der Merkmale *Körperbautyp* und *Psychosetyp* hat den Wert 2305.411 und überschreitet den Wert 15.50731, das 0.95-Quantil der χ^2_8-Verteilung. Beim gewählten Testniveau $\alpha = 0.05$ wird ein signifikanter Zusammenhang der Merkmale *Körperbautyp* und *Psychosetyp* festgestellt.

3. Die χ^2-Testgröße ist

$$T = \frac{\left(S_1 - \frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}} + \frac{\left(S_2 - 2\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)}{n}\right)^2}{2\frac{\left(S_1 + \frac{1}{2}S_2\right)\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)}{n}} + \frac{\left(S_3 - \frac{\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(S_3 + \frac{1}{2}S_2\right)^2}{n}}.$$

Bei Gültigkeit der Hypothese ist T asymptotisch χ^2_1-verteilt. Für die genannte Beobachtung hat die χ^2-Testgröße den Wert 0.0001021040. Das 0.975-Quantil der χ^2_1-Verteilung ist 5.0239. Bei dem gewählten Testniveau 0.025 ist die Hypothese mit der Beobachtung vereinbar.

Leibniz Universität Hannover

Hannover, 25.06.2008

Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. L. Baringhaus

Dipl.-Math. F. Dennert

Lösungen der Aufgaben von Blatt 10 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Für beobachtete Werte $x_1, \ldots, x_n$ ist

$$\left[\overline{x} - \frac{t_{n-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}\,,\, \overline{x} + \frac{t_{n-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}\right]$$

das beobachtete Konfidenzintervall zum zum Konfidenzniveau $1-\alpha$. Für die genannten Werte ergibt sich das beobachtete Konfidenzintervall [-0.0471389 , 0.1099389]

2. Für beobachtete Werte $x_1, \ldots, x_n$ ist $\left[\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}\,,\, \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}}\right]$ das beobachtete Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für σ. Für die genannten Werte ergibt sich das beobachtete Konfidenzintervall [0.0008023856 , 0.002572439] zum Konfidenzniveau $\alpha = 0.01$.

3. Für jedes $\lambda > 0$ ist

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P_\lambda\left(\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} \le 2\lambda\sum_{j=1}^{n} X_j \le \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= P_\lambda\left(\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j} \le \lambda \le \frac{\chi^2_{2n;\frac{1-\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j}\right), \end{aligned}$$

also

$$\left[\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j}, \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sum_{j=1}^{n} X_j}\right]$$

Konfidenzintervallschätzer zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für λ. Für die genannten Beobachtungswerte ist [0.1545 , 0.5506] das ermittelte Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$.

Leibniz Universität Hannover

Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. L. Baringhaus

Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 2.07.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 11 zur Vorlesung

Stochastik B

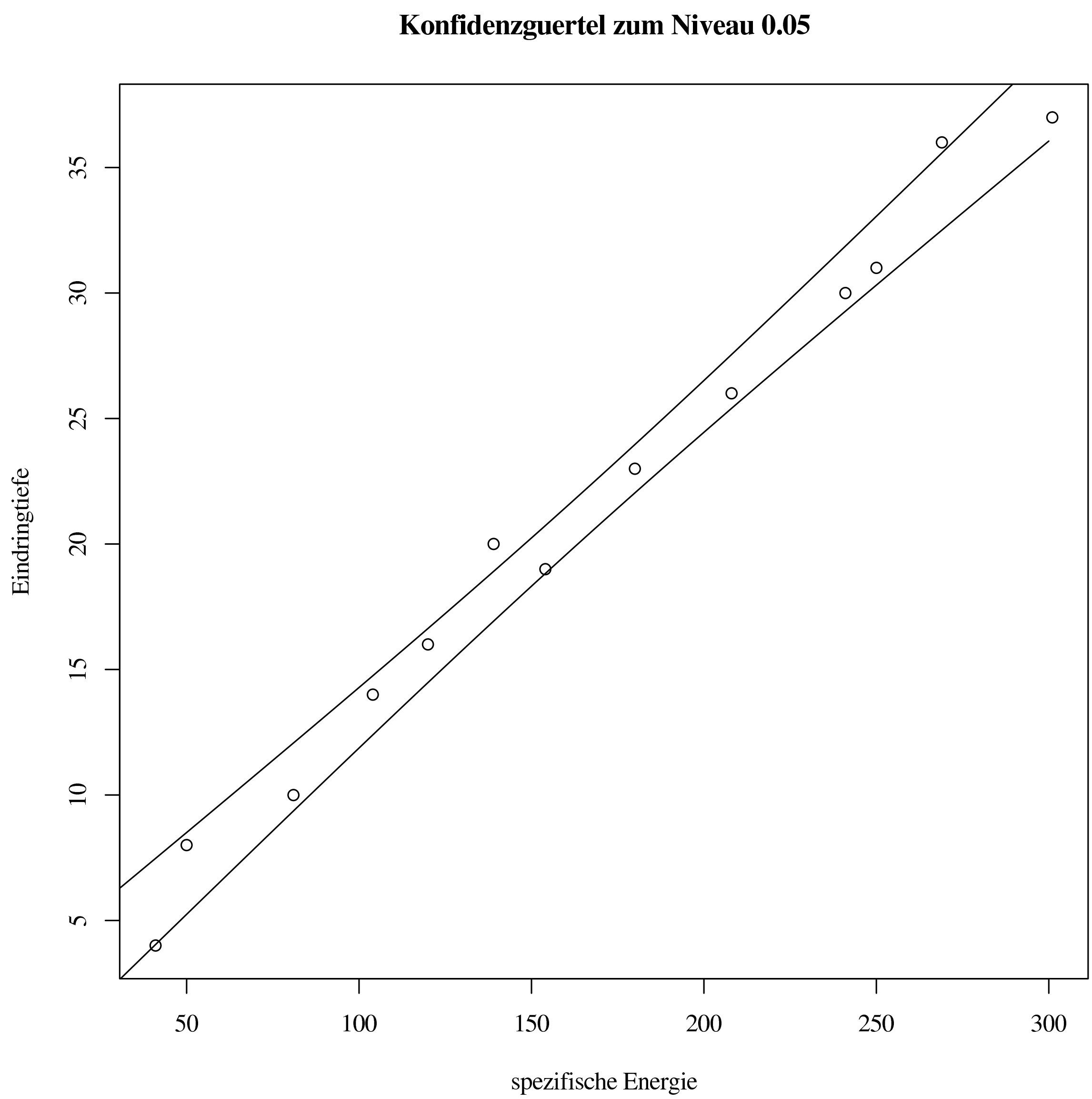
SS 2008

1. Es seien $\hat{a}, \hat{b}$ und $\hat{\sigma}^2$ die Maximum-Likelihood Schätzer von a, b und σ^2. Mit $c = t_{n-2;0.975}$ und $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$ ist

$$\left[\hat{a} + \hat{b}y_0 - c\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{(y_0-\overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right)}, \hat{a} + \hat{b}y_0 + c\sqrt{\frac{1}{n-2}\hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{(y_0-\overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right)}\right]$$

Konfidenzintervallschätzer zum Konfidenzniveau 0.95 für $a + by_0$. Das aus den gegebenen Beobachtungswerten ermittelte Konfidenzintervall ist $[3.1372\,,\, 4.5816]$.

2.



Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. F. Dennert

Hannover, 9.07.2008

Lösungen der Aufgaben von Blatt 12 zur Vorlesung

Stochastik B

SS 2008

1. Mit der exakten Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $(0.07431337\,,\ 0.1673625)$. Mit der in der Vorlesung vorgestellten ersten approximativen Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $[0.07786373\,,\ 0.1666472]$. Mit der der in der Vorlesung vorgestellten zweiten approximativen Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $[0.07078663\,,\ 0.1592134]$.

2. Es ist $s = 0 \cdot 42 + 1 \cdot 36 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4$ der beobachtete Wert der $\mathfrak{P}(n\lambda)$-verteilten Zufallsvariable S. Mit der exakten Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $(0.7498439\,,\ 1.072385)$. Mit der in der Vorlesung vorgestellten ersten approximativen Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $[0.756898\,,\ 1.070158]$. Mit der in der Vorlesung vorgestellten zweiten approximativen Methode ergibt sich das Konfidenzintervall $[0.7439555\,,\ 1.056045]$.