Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
5. Woche

14. Übungsblatt Stochastik A

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt gibt an, wie eine Klausur über Inhalte der Stochastik A aussehen *könnte*. Die Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Aufgabe 60. Von den 20 Hörern einer Vorlesung haben drei im Juli Geburtstag. Eine Gruppe von fünf Studierenden wird zufällig aus diesem Hörerkreis ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei im Juli Geborenen in der ausgewählten Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 61. Es seien $A_1,\dots,A_n$ unabhängige Ereignisse mit $P(A_i) < 1$ für $i = 1,\dots,n$. Zeigen Sie, dass dann $P\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) < 1$ gilt. Bleibt diese Schlussfolgerung richtig, wenn man die Voraussetzung der Unabhängigkeit streicht?

Aufgabe 62. In einer großen Firma laufen 20% der Computer mit dem Betriebssystem LX und 80% mit dem Betriebssystem WN. Es ist bekannt, dass 90% der LX-Computer und 30% der WN-Computer virenfrei sind. Der Systemadministrator stellt bei einem zufällig ausgewählten System fest, dass es virenfrei ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird auf diesem Computer das Betriebssystem LX verwendet?

Aufgabe 63. Es sei $a \geq 1$. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und beide gleichverteilt auf dem Intervall $(0, a)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) hat die Summe der beiden Zufallsgrößen einen Wert größer als 1,

(b) ist X kleiner als $2 \cdot Y$?

Aufgabe 64. Die Lebensdauer X eines bestimmen elektronischen Bauteils (in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

(b) Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer, d.h. $\mathrm{E}X$.

(c) Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Lebensdauer des Bauteils mit 50%iger Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich a ist.

Aufgabe 65. (a) Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M_n zum Mittelwert $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Zufallsvariablen.

(c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion M zu M_n, die man mit $n \to \infty$ erhält, und geben Sie ein Beispiel für eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
5. Woche

Lösungen zum

14. Übungsblatt Stochastik A

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt gibt an, wie eine Klausur über Inhalte der Stochastik A aussehen *könnte*. Die Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Aufgabe 60. Von den 20 Hörern einer Vorlesung haben drei im Juli Geburtstag. Eine Gruppe von fünf Studierenden wird zufällig aus diesem Hörerkreis ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei im Juli Geborenen in der ausgewählten Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Man kann diese Auswahl als Urnenmodell mit N Kugeln, M weißen und $N-M$ schwarzen, darstellen. Die weißen Kugeln entsprechen den im Juli Geborenen, die schwarzen den übrigen Hörern. Dann liegt eine hypergeometrische Verteilung mit Parametern $n=5$,$N=20$ und $M=3$ vor. Gesucht ist die Wahscheinlichkeit für das Ereignis „Anzahl weiße Kugeln gleich 3“.

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}}=0.00877$$

Aufgabe 61. Es seien $A_1,\dots,A_n$ unabhängige Ereignisse mit $P(A_i)<1$ für $i=1,\dots,n$. Zeigen Sie, dass dann $P\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big)<1$ gilt. Bleibt diese Schlussfolgerung richtig, wenn man die Voraussetzung der Unabhängigkeit streicht?

Lösung.

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= 1-P\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)^c\Big) \\
&= 1-P\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\Big) \\
&\overset{A_i \text{ unabh.}}{=} 1-\underbrace{\Pi_{i=1}^n(1-\underbrace{P(A_i)}_{<1})}_{>0}<1
\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit ist notwendig. Betrachtet man z.B. $n=2$ und $A_1,A_2=A_1^c$, so gilt

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1\cup A_1^c)=1$$

Aufgabe 62. In einer großen Firma laufen 20% der Computer mit dem Betriebssystem LX und 80% mit dem Betriebssystem WN. Es ist bekannt, dass 90% der LX-Computer und 30% der WN-Computer virenfrei sind. Der Systemadministrator stellt bei einem zufällig ausgewählten System fest, dass es virenfrei ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird auf diesem Computer das Betriebssystem LX verwendet?

Lösung. Es seien LX das Ereignis, dass das System LX eingesetzt wird, und WN, dass WN eingesetzt wird. Außerdem bezeichne S das Ereignis, dass kein Virus gefunden wurde. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich nun mit dem Satz von Bayes berechnen.

$$\begin{aligned} P(LX) = 0.2 &\qquad P(WN) = 0.8 \\ P(S|LX) = 0.9 &\qquad P(S|WN) = 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(LX|S) &= \frac{P(S|LX) \cdot P(LX)}{P(S|LX) \cdot P(LX) + P(S|WN) \cdot P(WN)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.9 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} \\ &= \frac{0.18}{0.42} = 42.86\% \end{aligned}$$

Aufgabe 63. Es sei $a \geq 1$. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und beide gleichverteilt auf dem Intervall $(0, a)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) hat die Summe der beiden Zufallsgrößen einen Wert größer als 1,

(b) ist X kleiner als $2 \cdot Y$?

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} P(X+Y>1) &= 1 - P(X+Y \leq 1) \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{=f_X(x) \cdot f_Y(y)} \, dy \, dx \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{a^2} \, dy \, dx \\ &= 1 - \frac{1}{a^2} \int_0^1 1 - x \, dx \\ &= 1 - \frac{1}{a^2} (x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2a^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X < 2Y) &= \int_0^a \int_{\frac{x}{2}}^a \frac{1}{a} \frac{1}{a} \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a a - \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{a^2} [ax - \frac{x^2}{4}] \Big|_0^a = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 64. Die Lebensdauer X eines bestimmen elektronischen Bauteils (in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

(b) Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer, d.h. EX.

(c) Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Lebensdauer des Bauteils mit 50%iger Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich a ist.

Lösung. (a) $1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{10}^{\infty} c \cdot x^{-3}\,dx = c \cdot \frac{1}{-2} x^{-2}\Big|_{10}^{\infty} = c \cdot \frac{1}{2 \cdot 100} \Rightarrow c = 200$

(b) $EX = \int_{10}^{\infty} x \cdot 200x^{-3}\,dx = 200 \int_{10}^{\infty} x^{-2}\,dx = 200 \frac{-1}{x}\Big|_{10}^{\infty} = 20$

(c) $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{10}^{a} 200x^{-3}\,dx = 200 \frac{-1}{2} x^{-2}\Big|_{10}^{a} = -100(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{100})$
$= 1 - \frac{100}{a^2} \overset{!}{=} 0.5 \Rightarrow a = \sqrt{200}$

Aufgabe 65. (a) Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M_n zum Mittelwert $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Zufallsvariablen.

(c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion M zu M_n, die man mit $n \to \infty$ erhält, und geben Sie ein Beispiel für eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M.

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{tX} &= \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{x(t-1)}\,dx \\ &= \frac{1}{t-1} e^{x(t-1)}\Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{-1}{t-1}, & t < 1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} M_n &= \mathrm{E}e^{t\bar{X}_n} = \mathrm{E}e^{t \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i} = \mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_1 + \ldots + \frac{t}{n} X_n} \\ &\overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \left(\mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{n}}\right)^n \text{ für } t < n \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{1-\frac{t}{n}}\big)^n \\ &= \frac{1}{\lim(1+\frac{-t}{n})^n} = e^t \end{aligned}$$

Um eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M angeben zu können, erinnere man sich daran, dass laut Vorlesung für eine $N(\mu,\sigma)$-verteilte Zufallsvariable gilt:

$$\varphi(t) = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}.$$

Für $\mu = 1, \sigma = 0$ entspricht dies obigem Ausdruck. Eine Zufallsvariable, die $N(1,0)$ verteilt ist, nimmt mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert Eins an. Also wäre X mit $P(X=1) = 1, P(X=a) = 0 \,\forall a \neq 1$ ein Beispiel.

Alternativ kann man die momenterzeugende Funktion zu einer δ_1-verteilten Zufallsvariable Y berechnen: $\mathrm{E}e^{tY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \underbrace{f_Y(y)}_{=\delta_1(y)} \, dy = e^t$. Auch dies führt auf obiges Ergebnis.