Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
42. Woche

1. Übungsblatt Stochastik A

Bitte beachten Sie die Hinweise zu Sprechstunden und Möglichkeit zur Notenverbesserung auf der Webseite der Vorlesung!

Stundenübung

Aufgabe 1. (Diese Aufgabe hat nicht viel mit Stochastik zu tun — es soll der Umgang mit den üblichen Bezeichnungen der Mengenlehre geübt werden.)

(a) Betrachten Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{1,2\} \times \{2,3\}, \ A_2 = \{(i,j) \in \{1,2,3\}^2 : i < j\}, \\
&A_3 = \{H \subset \{1,2,3\} : \#H = 2\}, \\
&B_1 = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\}, \ B_2 = \big\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\big\}, \\
&B_3 = \big\{(1,2),(1,3),(2,3)\big\}.
\end{aligned}$$

Jeweils eine A-Menge stimmt mit einer B-Menge überein. Welche mit welcher?

(b) Beweisen Sie die de Morganschen Regeln: Für zwei Mengen $A,B \subset \Omega$ gilt

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Aufgabe 2. Es seien A, B und C drei Ereignisse. Geben Sie mengenalgebraische Ausdrücke dafür an, dass

a) keines der Ereignisse eintritt,

b) genau zwei der Ereignisse eintreten,

c) höchstens zwei der Ereignisse eintreten.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 1/4, \ P(B^c) = 2/3, \ P(C) = 1/2,$$
$$P(A^c \cap B) = 1/4, \ P(B^c \cup C^c) = 5/6, \ P(A \cap C) = 0.$$

Hausübung

Aufgabe 4 (Efrons Würfel). a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben W. 1/6), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9.

Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es bezeichne X das Ergebnis des blauen, Y das Ergebnis des roten und Z das des grünen Würfels. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und berechnen sie dann:

$$P(X < Y),\ \ P(Y < Z) \text{ und } P(Z < X).$$

b) Angenommen Sie und Ihr(e) Freund(in) studieren beide Mathematik und kennen daher die Lösung des Aufgabenteils (a). Ihr(e) Freund(in) bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er/sie sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide jeweils den von Ihnen gewählten Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

c) Angenommen, Sie wollen mit zwei Ihrer Freunde ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

Bitte begründen Sie die Antworten zu (b) und (c) jeweils kurz.

(3/1/1 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 2P(A^c \cap (B \cup C)),\ \ P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 2/3,\ \ P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$$

(2 Punkte)

Aufgabe 6. Es seien $A_1, \ldots ,A_n$ Ereignisse. Beweisen Sie die Boolesche Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 43.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
42. Woche

Lösungen zum

1. Übungsblatt Stochastik A

Bitte beachten Sie die Hinweise zu Sprechstunden und Möglichkeit zur Notenverbesserung auf der Webseite der Vorlesung!

Stundenübung

Aufgabe 1. (Diese Aufgabe hat nicht viel mit Stochastik zu tun — es soll der Umgang mit den üblichen Bezeichnungen der Mengenlehre geübt werden.)

(a) Betrachten Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}&A_1 = \{1,2\} \times \{2,3\},\ A_2 = \{(i,j) \in \{1,2,3\}^2 : i < j\},\\ &A_3 = \{H \subset \{1,2,3\} : \#H = 2\},\\ &B_1 = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\},\ B_2 = \big\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\big\},\\ &B_3 = \big\{(1,2),(1,3),(2,3)\big\}.\end{aligned}$$

Jeweils eine A-Menge stimmt mit einer B-Menge überein. Welche mit welcher?

(b) Beweisen Sie die de Morganschen Regeln: Für zwei Mengen $A,B \subset \Omega$ gilt

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Lösung. (a) $A_1 = B_2$, $A_2 = B_3$, $A_3 = B_1$

(b) Beweis der de Morganschen Regeln

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= \{\omega \in \Omega : \omega \in (A \cup B)^c\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \notin (A \cup B)\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A \text{ und } \omega \notin B)\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A^c \text{ und } \omega \in B^c)\}\\ &= A^c \cap B^c.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{\omega \in \Omega : \omega \in (A \cap B)^c\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \notin (A \cap B)\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A \text{ oder } \omega \notin B)\}\\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A^c \text{ oder } \omega \in B^c)\}\\ &= A^c \cup B^c.\end{aligned}$$

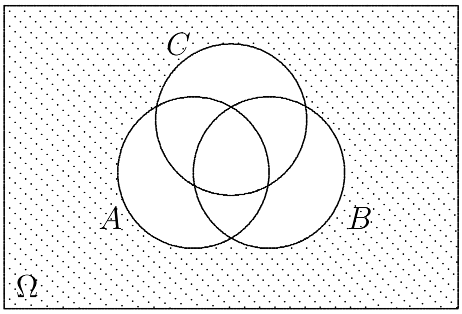
Aufgabe 2. Es seien A, B und C drei Ereignisse. Geben Sie mengenalgebraische Ausdrücke dafür an, dass

a) keines der Ereignisse eintritt,

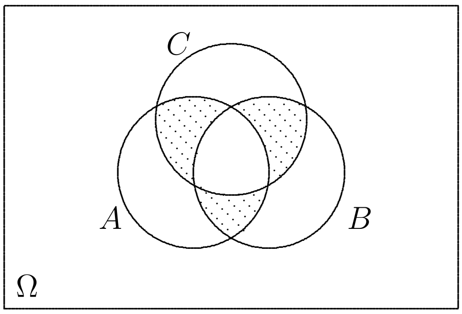
b) genau zwei der Ereignisse eintreten,

c) höchstens zwei der Ereignisse eintreten.

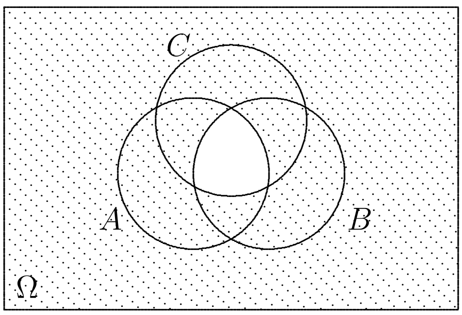
Lösung. (a) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$.



(b) $A \cap B \cap C^c + A \cap B^c \cap C + A^c \cap B \cap C$.



(c) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$.



Aufgabe 3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 1/4,\; P(B^c) = 2/3,\; P(C) = 1/2,$$
$$P(A^c \cap B) = 1/4,\; P(B^c \cup C^c) = 5/6,\; P(A \cap C) = 0.$$

Lösung. Nach der Siebformel von Sylvester-Poincaré gilt:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Für die einzelnen Summanden in dieser Formel gilt:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \tfrac{1}{4}, \text{ nach Aufgabenstellung},\\
P(B) &= 1 - P(B^c) \;=\; 1 - \tfrac{2}{3} \;=\; \tfrac{1}{3},\\
P(C) &= \tfrac{1}{2}, \text{ nach Aufgabenstellung},\\
P(A \cap B) &= P(B/(A^c \cap B)) \;=\; P(B) - P(A^c \cap B)\\
&= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \;=\; \tfrac{4}{12} - \tfrac{3}{12} \;=\; \tfrac{1}{12},\\
P(A \cap C) &= 0, \text{ nach Aufgabenstellung},\\
P(B \cap C) &= 1 - P((B \cap C)^c) \;=\; 1 - P(B^c \cup C^c) \;=\; 1 - \tfrac{5}{6}\\
&= \tfrac{1}{6}, \text{ nach den de Morganschen Regeln},\\
P(A \cap B \cap C) &\leq P(A \cap C) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - 0 - \frac{1}{6} + 0 = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{1}{12} - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Hausübung

Aufgabe 4 (Efrons Würfel). a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben W. 1/6), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9.

Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es bezeichne X das Ergebnis des blauen, Y das Ergebnis des roten und Z das des grünen Würfels. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und berechnen sie dann:

$$P(X < Y),\; P(Y < Z) \text{ und } P(Z < X).$$

b) Angenommen Sie und Ihr(e) Freund(in) studieren beide Mathematik und kennen daher die Lösung des Aufgabenteils (a). Ihr(e) Freund(in) bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er/sie sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide jeweils den von Ihnen gewählten Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

c) Angenommen, Sie wollen mit zwei Ihrer Freunde ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

Bitte begründen Sie die Antworten zu (b) und (c) jeweils kurz.

(3/1/1 Punkte)

Lösung. (a) Als sinnvoller WRaum erweist sich (Ω,P) mit

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; &\{(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),\\ &(6,3,1),(6,3,5),(6,3,9),(6,4,1),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,1),(6,8,5),(6,8,9),\\ &(7,3,1),(7,3,5),(7,3,9),(7,4,1),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\},\end{aligned}$$

und

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \text{ mit } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \ \forall A \subset \Omega, \text{ “Laplace-Experiment”}.$$

Es gilt:

$$\#\Omega = 3^3 = 27$$

und

$$\begin{aligned}\#\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),\\ &\quad (2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),(6,8,1),\\ &\quad (6,8,5),(6,8,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\}\\ &= 15,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\#\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) < Z(\omega)\} &= \#\{(2,3,5),(2,3,9),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,9),\\ &\quad (6,3,5),(6,3,9),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,9),\\ &\quad (7,3,5),(7,3,9),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,9)\}\\ &= 15,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) < X(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,4,1),(2,8,1),(6,3,1),(6,3,5),\\
&\quad (6,4,1),(6,4,5),(6,8,1),(6,8,5),(7,3,1),\\
&\quad (7,3,5),(7,4,1),(7,4,5),(7,8,1),(7,8,5)\}\\
&= 15.
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$P(X < Y) = P(Y < Z) = P(Z < X) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

(b) Wähle ich den blauen Würfel, so wählt mein Freund den roten Würfel und gewinnt mit W. 5/9. Wähle ich aber den roten Würfel, so wählt er den grünen Würfel und gewinnt ebenfalls mit W. 5/9. Wähle ich schließlich den grünen Würfel, so wählt mein Freund den blauen Würfel und gewinnt wiederum mit W. 5/9. Egal welchen Würfel ich wähle, ich wäre bei diesem Spiel immer im Nachteil und würde mich nicht darauf einlassen, es sei denn, ich bin unbedingt darauf aus zu verlieren.
(Bemerkung: Eigentlich ist der oben gewählte WRaum zur Beschreibung dieses Experiments gar nicht geeignet, schließlich werden hier ja nur zwei Würfel geworfen. Unser "gesunde Menschenverstand" sagt uns jedoch, dass wir genausogut auch noch den dritten Würfel mitwerfen können und dann in dem obigen WRaum arbeiten, ohne uns jedoch weiter um das Ergebnis des dritten Würfels zu kümmern. Später werden wir diesen Sachverhalt durch den Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* mathematisch präzisieren.)

(c) Egal welchen Würfel man wählt, man hat immer gegenüber einem der beiden anderen Würfel eine Gewinnw. von 5/9 und gegenüber dem anderen eine Gewinnw. von 4/9. Deshalb könnte man zunächst auf die Idee kommen, dass es egal ist, welchen Würfel man wählt. Zählt man aber genau nach, so merkt man, dass der blaue und der rote Würfel bei jeweils 8 Versuchsausgängen gewinnen, der grüne jedoch bei 11. Also sollte man den grünen Würfel wählen.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 2P(A^c \cap (B \cup C)),\ \ P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 2/3,\ \ P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$$

(2 Punkte)

Lösung. Es ist

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap (B \cup C)) = \frac{3}{2}P(A)$$

und

$$P(A) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

wobei aus $P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$ folgt

$$P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

also $P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B^c\cap C^c)$ und somit

$$P(A) = 2P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B^c\cap C) + P(A\cap B\cap C^c) \geq 2P(A\cap B\cap C)$$

Es folgt mit $P(A\cap B\cap C) = 1 - P((A\cap B\cap C)^c) = 1 - P(A^c\cup B^c\cup C^c) = \frac{1}{3}$

$$P(A\cup B\cup C) \geq 3P(A\cap B\cap C) = 1 \quad \text{und daher} \quad P(A\cup B\cup C) = 1.$$

Aufgabe 6. Es seien $A_1,\ldots,A_n$ Ereignisse. Beweisen Sie die Boolesche Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

(2 Punkte)

Lösung. Beweis durch vollständige Induktion.
IA: Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
&A_2 = (A_2\cap A_1) + (A_2\cap A_1^c) \Rightarrow P(A_2) = P(A_2\cap A_1) + P(A_2\cap A_1^c),\\
&(A_1\cup A_2) = A_1 + (A_2\cap A_1^c) \Rightarrow P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2\cap A_1^c)
\end{aligned}$$

und damit

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1\cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

(Wurde auch schon in der Vorlesung gezeigt.)

IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
P\big(A_1\cup\ldots\cup A_n\big) &= P\big((A_1\cup\ldots\cup A_{n-1})\cup A_n\big)\\
&\leq P(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IA,}\\
&\leq P(A_1) + \ldots + P(A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IV.}
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
43. Woche

2. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 7. (a) Wieviele verschiedene Worte, d.h. Anordnungen von Buchstaben, lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes $MISSISSIPPI$ erhalten?

(b) In einem Beutel befinden sich 11 Scrabble-Spielsteine, von denen je 4 den Buchstaben S bzw. I und zwei den Buchstaben P und einer den Buchstaben M tragen. Die Spielsteine werden nacheinander, zufällig und ohne Zurücklegen dem Beutel entnommen und nebeneinandergelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man das Wort $MISSISSIPPI$?

Aufgabe 8. In einen Zug, der aus 5 Wagen besteht, steigen 10 Personen ein, wobei die Auswahl jedes Wagens durch jede Person gleichwahrscheinlich ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) in jeden Wagen zwei Personen steigen.

(b) ein Wagen leer bleibt, in einen anderen eine, in zwei Wagen zwei Personen und in den verbleibenden fünf Personen steigen.

Aufgabe 9. Die folgenden Formeln mit Binomialkoeffizienten lassen sich elementar nur recht mühsam beweisen. Kennt man jedoch den kombinatorischen Hintergrund, so sind sie (fast) unmittelbar einleuchtend.

(a) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

(b) $\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

(c) Die folgende Formel ergibt sich als Spezialfall von (b):

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Hausübung

Anmerkung: Mit (*) gekennzeichnete Aufgabenteile werden nicht auf die Bestimmung der in diesem Semester maximal erreichbaren Punkte angerechnet. Durch Bearbeitung ist es also möglich, einen Bonus für das eigene Punktekonto zu erwerben.

Aufgabe 10. Im Stadtrat einer Großstadt sind vier Parteien A, B, C und D vertreten. Ein 15-köpfiger Stadtratsausschuss soll neu besetzt werden. Folgende Übersicht gibt an, wie viele Sitze jede der Parteien besetzen kann und wie viele dafür geeignete Fachleute sie hat:

Partei	A	B	C	D
Anzahl der Sitze	3	4	6	2
Anzahl der Fachleute	5	6	8	3

(a) Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die beiden Experten Huber und Meier der Partei C, die stets zusammenarbeiten, dem Ausschuss nur gemeinsam oder gar nicht angehören wollen?

(3/3 Punkte)

Aufgabe 11. (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Nullen und n Einsen ($m < n$) so nebeneinanderzuschreiben, dass keine zwei Nullen nebeneinanderstehen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-fachen Wurf einer fairen Münze exakt m-mal 'Kopf' kommt?

(c) * Wiederum werde eine faire Münze n-fach geworfen. Wie groß ist (im Falle $m > n/2$) die Wahrscheinlichkeit, dass m-mal 'Kopf' geworfen wird und in der gesamten Wurffolge niemals zweimal hintereinander 'Zahl' erscheint?

(3/2/4 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 44.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
43. Woche

Lösungen zum

2. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 7. (a) Wieviele verschiedene Worte, d.h. Anordnungen von Buchstaben, lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes $MISSISSIPPI$ erhalten?

(b) In einem Beutel befinden sich 11 Scrabble-Spielsteine, von denen je 4 den Buchstaben S bzw. I und zwei den Buchstaben P und einer den Buchstaben M tragen. Die Spielsteine werden nacheinander, zufällig und ohne Zurücklegen dem Beutel entnommen und nebeneinandergelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man das Wort $MISSISSIPPI$?

Lösung. (a) Angenommen, alle 11 Buchstaben des Wortes $MISSISSIPPI$ werden eindeutig gekennzeichnet, dann gäbe es 11! Möglichkeiten. Dadurch, dass 4 "S", 2 "P" und 4 "I" im Wort vorkommen, die nicht unterscheidbar sind, wird jede Möglichkeit ein Wort zu erstellen, $4! \cdot 2! \cdot 4!$ mal gezählt. Es gibt also $11!/(4! \cdot 2! \cdot 4!) = 34650$ verschiedene Worte.

(b) Angenommen, alle 11 Buchstaben werden eindeutig gekennzeichnet, dann gibt es 11! gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, die Scrabble-Steine zu ziehen. Nach Teil (a) führen $4! \cdot 2! \cdot 4!$ dieser Möglichkeiten auf das Wort $MISSISSIPPI$. Die Wahrscheinlichkeit, dass man dieses Wort erhält, ist also $1/34650$.

Aufgabe 8. In einen Zug, der aus 5 Wagen besteht, steigen 10 Personen ein, wobei die Auswahl jedes Wagens durch jede Person gleichwahrscheinlich ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) in jeden Wagen zwei Personen steigen.

(b) ein Wagen leer bleibt, in einen anderen eine, in zwei Wagen zwei Personen und in den verbleibenden fünf Personen steigen.

Lösung. Betrachte 10-Tupel $(a_1, \dots, a_{10})$ aus Zahlen von $1, \dots, 5$, $a_i \in \{1, \dots, 5\}$, wobei $a_i = j$ bedeute, dass Person i in Wagen j einsteigt.

$$\Omega = \{1, \dots, 5\}^{10}$$

Insgesamt gibt es bei dieser Betrachtungsweise $|\Omega| = 5^{10}$ gleich wahrscheinliche Möglichkeiten.

(a) Wähle für jeden Wagen 2 Personen aus (beginnend mit dem ersten). Insgesamt gibt es dafür

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\frac{5!}{5!} = \frac{10!}{2^5}$$

Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist somit $\frac{10!}{2^5 5^{10}} \approx 0.0116$.

(b) Analog zu (a) ergibt sich

$$\binom{10}{0}\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{5}\frac{5!}{2!} = \frac{10!}{8},$$

wobei der letzte Faktor die Anzahl der Möglichkeiten ist, die 5 Wagen zu tauschen unter Berücksichtigung, dass zwei Wagen mit zwei Personen besetzt werden. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist somit $\frac{10!}{8 \cdot 5^{10}} \approx 0.0464$.

Aufgabe 9. Die folgenden Formeln mit Binomialkoeffizienten lassen sich elementar nur recht mühsam beweisen. Kennt man jedoch den kombinatorischen Hintergrund, so sind sie (fast) unmittelbar einleuchtend.

(a) $\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ r-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ r \end{array}\right)$.

(b) $\left(\begin{array}{c} n+m \\ r \end{array}\right) = \sum\limits_{k=0}^{r} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ r-k \end{array}\right)$.

(c) Die folgende Formel ergibt sich als Spezialfall von (b):

$\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2$.

Lösung. (a) $\binom{n}{r}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, r Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen, ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen. Angenommen, die Kugeln sind mit den Zahlen von 1 bis n durchnummeriert. Dann gibt es 2 (disjunkte) Möglichkeiten: Die Kugel mit der Nummer 1 wird mitgezogen oder nicht.

Anzahl der Möglichkeiten, r Kugeln zu ziehen und die Kugel Nr. 1 ist dabei: $\binom{1}{1}\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1}$.

Anzahl der Möglichkeiten, r Kugeln zu ziehen und die Kugel Nr. 1 ist nicht dabei: $\binom{1}{0}\binom{n-1}{r} = \binom{n-1}{r}$.

(b) Angenommen wir haben eine Urne mit n schwarzen und m weißen Kugeln. Dann ist $\binom{n+m}{r}$ die Anzahl der Möglichkeiten, r Kugeln aus dieser Urne zu ziehen (ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen). Diese Anzahl kann man (disjunkt) zerlegen nach der Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln: Wieviele Möglichkeiten gibt es, k schwarze (und dann natürlich $r-k$ weiße) Kugeln zu ziehen? Antwort: $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$. Also:

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{\min\{n,r\}} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k},$$

denn $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

(c)
$$\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Hausübung

Anmerkung: Mit (*) gekennzeichnete Aufgabenteile werden nicht auf die Bestimmung der in diesem Semester maximal erreichbaren Punkte angerechnet. Durch Bearbeitung ist es also möglich, einen Bonus für das eigene Punktekonto zu erwerben.

Aufgabe 10. Im Stadtrat einer Großstadt sind vier Parteien A, B, C und D vertreten. Ein 15-köpfiger Stadtratsausschuss soll neu besetzt werden. Folgende Übersicht gibt an, wie viele Sitze jede der Parteien besetzen kann und wie viele dafür geeignete Fachleute sie hat:

Partei	A	B	C	D
Anzahl der Sitze	3	4	6	2
Anzahl der Fachleute	5	6	8	3

(a) Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die beiden Experten Huber und Meier der Partei C, die stets zusammenarbeiten, dem Ausschuss nur gemeinsam oder gar nicht angehören wollen?

(3/3 Punkte)

Lösung. (a) Um den Ausschuss zu besetzen, muss man aus der Menge der 5 Fachleute der Partei A 3 Fachleute auswählen, dann aus den 6 Fachleuten der Partei B 4 Fachleute, usw. Es ergeben sich
$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{8}{6}\binom{3}{2} = 10 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 3 = 12600$$
mögliche Besetzungen.

(b) Man kann zwei (disjunkte) Fälle unterscheiden: Huber und Meier gehören beide dem Ausschuss an, oder Huber und Meier gehören beiden nicht dem Ausschuss an.

Besetzungen mit Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{4}$.

Besetzungen ohne Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{6}$.

Daraus ergeben sich insgesamt
$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\left[\binom{6}{4} + \binom{6}{6}\right] = 10 \cdot 15 \cdot 3 \cdot (15+1) = 7200$$
mögliche Besetzungen.

Aufgabe 11. (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Nullen und n Einsen ($m < n$) so nebeneinanderzuschreiben, dass keine zwei Nullen nebeneinanderstehen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-fachen Wurf einer fairen Münze exakt m-mal 'Kopf' kommt?

(c) * Wiederum werde eine faire Münze n-fach geworfen. Wie groß ist (im Falle $m > n/2$) die Wahrscheinlichkeit, dass m-mal 'Kopf' geworfen wird und in der gesamten Wurffolge niemals zweimal hintereinander 'Zahl' erscheint?

(3/2/4 Punkte)

Lösung. (a) Man denke sich die n Einsen in einer Reihe nebeneinandergeschrieben. Zwischen den Einsen gibt es zusammen mit der ersten und der letzten Position $n + 1$ Zwischenräume. Die m Nullen sollen nun so auf die Zwischenräume verteilt werden, dass in jeden Zwischenraum höchstens eine Null kommt, oder mit anderen Worten: wir wählen aus den $n + 1$ Zwischenräumen m aus und schreiben in jeden genau eine Null. Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Zwischenräume aus $n + 1$ auszuwählen? Antwort:

$$\binom{n+1}{m},$$

und dies ist damit auch die gesuchte Anzahl der Anordnungen der Nullen und Eisen in der vorgeschriebenen Weise.

(b) Wir schreiben abkürzend "1" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Kopf erscheint und "0" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Zahl erscheint. Dann haben wir ein Laplace-Experiment über dem Ergebnisraum

$$\Omega := \{(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\dots n\}$$

der 0-1-Folgen der Länge n über $\{0,1\}$. Dabei soll beispielsweise $\omega_i = 1$ bedeuten, dass beim i-ten Wurf der Münze Kopf erscheint. Es ist $\#\Omega = 2^n$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: "Es erscheint exakt m Mal Kopf". Das bedeutet aber, dass wir als Ergebnis ein n-Tupel aus Ω erhalten, bei dem genau m Positionen 1 und $n - m$ Positionen 0 sind. Also Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Einsen auf n Positionen und anschließend $n-m$ Nullen aus die verbleibenden $n - m$ Positionen zu verteilen? Antwort:

$$\#A = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-m} = \binom{n}{m}$$

und damit

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

(c) * Ω sei wie in Aufgabenteil (b). Sei B das hier betrachtete Ereignis. Dann bedeutet die Forderung, dass niemals zweimal hintereinander Zahl erscheint, dass genau die 0-1-Folgen aus Ω in B liegen, die m Einsen und $n-m$ Nullen enthalten und bei denen niemals zwei Nullen aufeinanderfolgen. Lt. Aufgabenteil (a) ist damit

$$\#B = \binom{m+1}{n-m},$$

und somit gilt

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{m+1}{n-m}}{2^n}.$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
44. Woche

3. Übungsblatt Stochastik A

Die Klausur zur Stochastik A findet am 3.2.07 in Zeit von 12.00-13.30 Uhr im Audimax statt. Modalitäten wie z.B. erlaubte Hilfsmittel werden noch bekannt gegeben.

Stundenübung

Aufgabe 12. Ein Sack enthalte 10 verschiedene Paar Schuhe. Nacheinander und ohne Zurücklegen werden 8 Schuhe entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

a) mindestens

b) genau

ein passendes Paar?

Aufgabe 13. Bei der Fußball EM 2004 gab es in der Vorrunde die vier Gruppen A, B, C, D mit jeweils vier Teams.

(a) Wie viele Vorrundenspiele finden pro Gruppe statt, wenn jedes Team genau einmal gegen jedes andere spielt? Angenommen in einer Gruppe sind n Teams. Wie viele Vorrundenspiele finden dann pro Gruppe statt?

(b) Wir nehmen an, dass die 16 Teams zufällig auf die vier Gruppen aufgeteilt werden, so dass jede Aufteilung gleich wahrscheinlich ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland und die Niederlande in einer Gruppe sind?

(c) Die Hälfte der Teams wird mit Trikots der Marke XXL ausgestattet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe A alle Teams Trikots der Marke XXL tragen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine Gruppe gibt, in der alle Teams Trikots der Marke XXL tragen?

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten gibt, die Zahl k als Summe von n nichtnegativen ganzen Zahlen zu schreiben. Wieviele Möglichkeiten ergeben sich, wenn die n Summanden positive ganze Zahlen seien sollen?

Hausübung

Aufgabe 15. Seit Jahren findet im deutschen Fernsehen jeden Samstag die Ziehung der Lottozahlen “6 aus 49” statt. Dabei werden in einer Urne 49 durchnumerierte Kugeln gut durchmischt und anschließend 6 Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen entnommen. Anschließend wird noch eine siebte “Zusatzzahl” aus den verbleibenden Kugeln in der Urne gezogen. Die Mitspieler vor den Fernsehschirmen haben in der Woche zuvor einen Tippschein ausgefüllt, auf dem sie 6 der Zahlen von 1 bis 49 angekreuzt haben, in der Hoffnung, dass diese am Samstag erscheinen werden.
Gewonnen hat man, wenn für den eigenen Tippschein eines der folgenden Ereignisse zutrifft:

a) 3 Richtige (d.h. man hat genau drei der Gewinnzahlen richtig getippt.)

b) 3 Richtige + Zusatzzahl (d.h. man hat genau drei der Gewinnzahlen richtig getippt und unter den übrigen drei Zahlen auf dem eigenen Tippschein befindet sich auch noch die Zusatzzahl.)

c) 4 Richtige

d) 5 Richtige

e) 5 Richtige + Zusatzzahl

f) 6 Richtige

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle diese Ereignisse. Geben Sie abschließend die Wahrscheinlichkeit an, dass man überhaupt etwas gewinnt.

(6×0.5/2 Punkte)

Aufgabe 16. a) n unterscheidbare Objekte werden zufällig auf n Plätze verteilt. Mehrfachbesetzungen sollen dabei möglich sein und jede Belegung der Plätze soll dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Platz frei bleibt?

b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n.$$

(2/4 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 45.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
44. Woche

Lösungen zum

3. Übungsblatt Stochastik A

Die Klausur zur Stochastik A findet am 3.2.07 in Zeit von 12.00-13.30 Uhr im Audimax statt. Modalitäten wie z.B. erlaubte Hilfsmittel werden noch bekannt gegeben.

Stundenübung

Aufgabe 12. Ein Sack enthalte 10 verschiedene Paar Schuhe. Nacheinander und ohne Zurücklegen werden 8 Schuhe entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

a) mindestens

b) genau

ein passendes Paar?

Lösung. Im Sack befinden sich 20 Schuhe, die in 10 Teilmengen zerlegt werden, wobei sich in jeder Teilmenge die beiden Schuhe eines Paares befinden. Wieviele Möglichkeiten gibt es überhaupt, 8 Schuhe aus dem Sack mit 20 Schuhen herauszugreifen? Antwort: $\binom{20}{8}$.

a) Wir berechnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis. Wieviele Möglichkeiten gibt es also, 8 Schuhe herauszugreifen, ohne dass darunter ein Paar ist? Nun, es müssen zunächst 8 der 10 Paar ausgewählt werden und dann aus jedem dieser Paare genau einer der beiden Schuhe gegriffen werden: $\binom{10}{8}\binom{2}{1}^8$ Möglichkeiten. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{\binom{10}{8} \cdot 2^8}{\binom{20}{8}} \approx 0.909.$$

b) Jetzt muss man eines der 10 Paare auswählen und beide Schuhe ziehen, und dann von den verbleibenden 9 Paaren 6 auswählen und jeweils 1 Schuh ziehen, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{2}{2}\binom{9}{6}\binom{2}{1}^6}{\binom{20}{8}} = \frac{10 \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6}{\binom{20}{8}} \approx 0.427.$$

Aufgabe 13. Bei der Fußball EM 2004 gab es in der Vorrunde die vier Gruppen A, B, C, D mit jeweils vier Teams.

(a) Wie viele Vorrundenspiele finden pro Gruppe statt, wenn jedes Team genau einmal gegen jedes andere spielt? Angenommen in einer Gruppe sind n Teams. Wie viele Vorrundenspiele finden dann pro Gruppe statt?

(b) Wir nehmen an, dass die 16 Teams zufällig auf die vier Gruppen aufgeteilt werden, so dass jede Aufteilung gleich wahrscheinlich ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland und die Niederlande in einer Gruppe sind?

(c) Die Hälfte der Teams wird mit Trikots der Marke XXL ausgestattet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe A alle Teams Trikots der Marke XXL tragen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine Gruppe gibt, in der alle Teams Trikots der Marke XXL tragen?

Lösung. (a) Wenn in einer Gruppe n Teams sind, gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Möglichkeiten, zwei Mannschaften gegeneinander spielen zu lassen. Bei $n = 4$ sind dies $\binom{4}{2} = 6$ Vorrundenspiele in jeder Gruppe.

(b) Angenommen, man stellt sich vor, Deutschland ist bereits in eine Gruppe ausgelost und o.B.d.A. wird als nächstes die Niederlande ausgelost. Dann sind 3 von den verbleibenden $3+4+4+4$ Positionen günstig für das gesuchte Ereignis, die Wahrscheinlichkeit ist also $3/15 = 1/5$.

(c) Es gibt $\binom{8}{4}$ Möglichkeiten, aus den 8 Teams mit Trikots der Marke XXL 4 auszuwählen, und $\binom{16}{4}$ Möglichkeiten, aus 16 Teams 4 für eine Gruppe zu wählen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe A alle Teams Trikots der Marke XXL tragen, ist also $\binom{8}{4}/\binom{16}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine Gruppe gibt, in der alle Teams Trikots der Marke XXL tragen, lässt sich z.B. mit der Siebformel bestimmen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als zwei 'XXL-Gruppen' gibt, gleich Null. P('Gruppe i ist XXL-Gruppe') ist $\binom{8}{4}/\binom{16}{4}$, $i \in \{1,\ldots,4\}$. Und P('Die Gruppen i und j sind XXL-Gruppen') beträgt $\binom{8}{4}\binom{4}{4}/\binom{16}{4}\binom{12}{4}$, $i,j \in \{1,\ldots,4\}$, $i \neq j$. Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, verschiedene i und j zu wählen. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$4\frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}\binom{12}{4}} = \frac{329}{2145}.$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten gibt, die Zahl k als Summe von n nichtnegativen ganzen Zahlen zu schreiben. Wieviele Möglichkeiten ergeben sich, wenn die n Summanden positive ganze Zahlen seien sollen?

Lösung. Zu zeigen ist

$$\#\{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}_0^n : i_1 + \ldots + i_n = k\} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bezeichnet i_j die Anzahl der Objekte auf Platz j (ein leeres Feld würde zu einem Summanden 0 gehören), so erhält man den Zusammenhang zu den Kombinationen mit Wiederholungen.

Lässt man nur positive Summanden zu, so muss $k \geq n$ sein. Gesucht ist

$$\#\{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n : i_1 + \ldots + i_n = k\}.$$

Zieht man von jedem der n Summanden den Wert 1 ab, so gilt es, ersteres Problem zu lösen:

$$\#\{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : i_1 + \ldots + i_n = k - n\} = \binom{n + k - n - 1}{k - n} = \binom{k-1}{k-n}.$$

Hausübung

Aufgabe 15. Seit Jahren findet im deutschen Fernsehen jeden Samstag die Ziehung der Lottozahlen "6 aus 49" statt. Dabei werden in einer Urne 49 durchnumerierte Kugeln gut durchmischt und anschließend 6 Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen entnommen. Anschließend wird noch eine siebte "Zusatzzahl" aus den verbleibenden Kugeln in der Urne gezogen. Die Mitspieler vor den Fernsehschirmen haben in der Woche zuvor einen Tippschein ausgefüllt, auf dem sie 6 der Zahlen von 1 bis 49 angekreuzt haben, in der Hoffnung, dass diese am Samstag erscheinen werden.
Gewonnen hat man, wenn für den eigenen Tippschein eines der folgenden Ereignisse zutrifft:

a) 3 Richtige (d.h. man hat genau drei der Gewinnzahlen richtig getippt.)

b) 3 Richtige + Zusatzzahl (d.h. man hat genau drei der Gewinnzahlen richtig getippt und unter den übrigen drei Zahlen auf dem eigenen Tippschein befindet sich auch noch die Zusatzzahl.)

c) 4 Richtige

d) 5 Richtige

e) 5 Richtige + Zusatzzahl

f) 6 Richtige

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle diese Ereignisse. Geben Sie abschließend die Wahrscheinlichkeit an, dass man überhaupt etwas gewinnt.

(6×0.5/2 Punkte)

Lösung. Insgesamt gibt es $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten, 6 Zahlen auf dem Tippschein anzukreuzen. Die Ziehung der Lottozahlen am Samstag unterteilt dann die Menge der Zahlen von 1 bis 49 in drei Teilmengen: die Menge A der 6 Gewinnzahlen, die Menge B, die die Zusatzzahl enthält und die Menge C der übrigen 42 Zahlen.

a) Um genau 3 Richtige zu haben, muß der eigene Tippschein 3 Zahlen aus Menge A, keine aus Menge B und 3 Zahlen aus Menge C enthalten. Also ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige zu

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{1}{0}\binom{42}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 1.64190 \cdot 10^{-2}.$$

b) Analog ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige + Zusatzzahl

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 1.23142 \cdot 10^{-3}.$$

c) 4 Richtige (mit oder ohne Zusatzzahl ist egal):

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{1}{0}\binom{42}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{1}{1}\binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 9.68620 \cdot 10^{-4}.$$

d) 5 Richtige:

$$\frac{\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} \approx 1.80208 \cdot 10^{-5}.$$

e) 5 Richtige + Zusatzzahl:

$$\frac{\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} \approx 4.29067 \cdot 10^{-7}.$$

f) 6 Richtige:

$$\frac{\binom{6}{6}\binom{1}{0}\binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} \approx 7.15112 \cdot 10^{-8}.$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, überhaupt etwas zu gewinnen (als Summe aller vorangegangenen Wahrscheinlichkeiten) zu $1.86376 \cdot 10^{-2}$.

Aufgabe 16. a) n unterscheidbare Objekte werden zufällig auf n Plätze verteilt. Mehrfachbesetzungen sollen dabei möglich sein und jede Belegung der Plätze soll dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Platz frei bleibt?

b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \; = \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (n-k)^n.$$

(2/4 Punkte)

Lösung. a) Es gibt n^n Möglichkeiten n unterscheidbare Objekte auf n Plätze bei möglicher Mehrfachbesetzung zu verteilen. Bei wievielen dieser Möglichkeiten bleibt mindestens einer der Plätze frei? Schwer zu sagen. Einfach ist jedoch die Anzahl der Möglichkeiten für das Gegenereignis zu berechnen: Die Anzahl der Möglichkeiten, die n Objekte so zu verteilen, daß **kein** Platz frei bleibt, beträgt $n!$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$1 - \frac{n!}{n^n}.$$

b) Zu zeigen ist

$$n! \; = \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (n-k)^n.$$

Da Aufgabenteil (a) verwendet werden soll, formen wir diese Gleichung zunächst einmal so um, daß auf der linken Seite die unter (a) berechnete Wahrscheinlichkeit steht und versuchen dann die rechte Seite entsprechend zu interpretieren:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \\ \frac{n!}{n^n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \\ 1 - \frac{n!}{n^n} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Links steht jetzt also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, das beim Verteilen von n unterscheidbaren Objekten auf n Plätze bei möglicher Mehrfachbesetzung mindestens ein Platz frei bleibt. Und auf der rechten Seite? Das ist nichts anderes als die Siebformel für dieses Ereignis! Der Summationsindex k gibt die Anzahl der Plätze an, die jeweils frei bleiben, der Binomialkoeffizient $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, jeweils k Plätze auszuwählen, die frei bleiben sollen, und $\left(\frac{n-k}{n}\right)^n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Objekte auf die übrigen $n-k$ Plätze verteilt werden.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
45. Woche

4. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 17. (Bedingte Unabhängigkeit) Es seien $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A,B,C drei Ereignisse, wobei $P(C) > 0$ gilt. Dann heißen die Ereignisse A und B *bedingt unabhängig* unter C, wenn gilt:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Sind A und B unabhängige Ereignisse, so sind sie auch bedingt unabhängig unter C.

Aufgabe 18. Bei einer binären Übertragung von Nachrichten werden durch Störung 5% der gesendeten Nullen zu Einsen und 3% der gesendeten Einsen zu Nullen verfälscht. Das Verhältnis der gesendeten Nullen zu den gesendeten Einsen betrage 3:5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine empfangene Null richtig ist?

Aufgabe 19. (Das Ziegenproblem) Bei einer Game-Show befindet sich hinter einer von drei Türen ein Auto. Der Kandidat wählt eine Tür; der Showmaster öffnet draufhin eine der beiden übrigen bzw. die übrige Tür, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Option, von seiner ursprünglichen Wahl abzurücken und sich für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden. Sollte er dies tun? (Wir setzen voraus, dass er das Auto haben möchte.)

Hausübung

Aufgabe 20. Es sei A das Ereignis, dass ein bestimmter Fluss verschmutzt ist, B das Ereignis, dass ein Test des Flusswassers eine Verschmutzung entdeckt, und C das Ereignis, dass das Fischen im Fluss erlaubt ist. Weiter sei

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0.3, & P(C|A \cap B) = 0.20, & P(C|A^c \cap B^c) = 0.90, \\ P(B|A) = 0.75, & P(C|A \cap B^c) = 0.80, & P(B|A^c) = 0.20. \end{array}$$

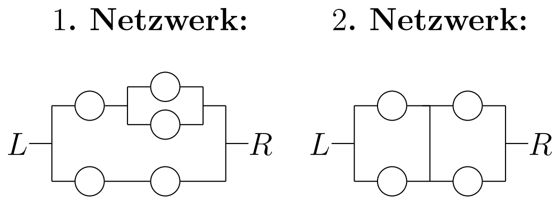
(a) Bestimmen Sie $P(A \cap B \cap C)$.

(b) Bestimmen Sie $P(B^c \cap C)$.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass der Fluss verschmutzt ist, wenn bekannt ist, dass Fischen erlaubt ist und ein Test keine Verschmutzung angezeigt hat.

(1/2/1 Punkte)

Aufgabe 21. Zwei Netzwerke bestehen aus mehreren wie im nachfolgenden Diagramm angeordneten Schaltern, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$, geschlossen sind.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

i) im ersten

ii) im zweiten

Netzwerk ein Strom von L nach R fließen kann.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von p jeweils an, bei welchem der beiden Netzwerke die Wahrscheinlichkeit, dass ein Strom fließt, größer ist.

(3/1 Punkte)

Aufgabe 22. Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Sechs auftritt, wenn bekannt ist, dass alle drei gewürfelten Augenzahlen verschieden sind.

(3 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 46.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
45. Woche

Lösungen zum

4. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 17. (Bedingte Unabhängigkeit) Es seien $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C drei Ereignisse, wobei $P(C) > 0$ gilt. Dann heißen die Ereignisse A und B *bedingt unabhängig* unter C, wenn gilt:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Sind A und B unabhängige Ereignisse, so sind sie auch bedingt unabhängig unter C.

Lösung. Frage: A, B unabhängig $\Rightarrow$ A, B bedingt unabhängig? Zu zeigen ist also:

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)}.$$

Dies wird im Allgemeinen *nicht* der Fall sein. Gegenbeispiel: eine faire Münze wird zweimal geworfen, 1: Kopf, 0: Zahl, $\Omega = \{0,1\}^2$ (Laplace-Experiment).

$$\begin{aligned} A &= \text{“Kopf im ersten Versuch”} = \{(1,0),(1,1)\} \\ B &= \text{“Kopf im zweiten Versuch”} = \{(0,1),(1,1)\} \\ C &= \text{“verschiedene Ergebnisse”} = \{(0,1),(1,0)\} \end{aligned}$$

Dann ist $A \cap B \cap C = \emptyset$, also $P(A \cap B \cap C) = 0$, aber $A \cap C = \{(1,0)\}$ und $B \cap C = \{(0,1)\}$, also $P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4 > 0$.

Aufgabe 18. Bei einer binären Übertragung von Nachrichten werden durch Störung 5% der gesendeten Nullen zu Einsen und 3% der gesendeten Einsen zu Nullen verfälscht. Das Verhältnis der gesendeten Nullen zu den gesendeten Einsen betrage 3:5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine empfangene Null richtig ist?

Lösung. Wir betrachten das folgende mathematische Modell:

$\Omega = \{(i,j)|i,j \in \{0,1\}\}$, wobei die erste Komponente das gesendete Signal und die zweite Komponente das empfangene Signal bezeichnet. Folgende Ereignisse sind von Interesse:

$$\begin{aligned} S_0 &= \text{„eine Null wird gesendet“} \\ S_1 &= \text{„eine Eins wird gesendet“} \\ E_0 &= \text{„eine Null wird empfangen“} \end{aligned}$$

Bekannt sind:

$P(E_0|S_0) = 0.95, P(E_0|S_1) = 0.03$ und $P(S_0) = 0.6P(S_1)$. Außerdem ist $\Omega = S_0 + S_1$. Damit folgt mit der Formel von Bayes:

$$P(S_0|E_0) = \frac{P(S_0)P(E_0|S_0)}{P(S_0)P(E_0|S_0) + P(S_1)P(E_0|S_1)} = 0.95$$

Aufgabe 19. (Das Ziegenproblem) Bei einer Game-Show befindet sich hinter einer von drei Türen ein Auto. Der Kandidat wählt eine Tür; der Showmaster öffnet draufhin eine der beiden übrigen bzw. die übrige Tür, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Option, von seiner ursprünglichen Wahl abzurücken und sich für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden. Sollte er dies tun? (Wir setzen voraus, dass er das Auto haben möchte.)

Lösung. Das Ziegenproblem ist eines der klassischen (unechten) Paradoxa der elementaren Stochastik, und es gibt eine Vielzahl von verschiedenen Begündungen, warum man das gewählte Tor wechseln sollte. Ich gebe hier eine streng mathematische Begründung an.

Wir nummerieren die Türen mit 1, 2, 3, o.B.d.A. wählt der Kandidat als erstes die Tür 1. Für $i = 1{,}2{,}3$ bezeichne

$$\begin{aligned} T_i &= \text{“Auto steht hinter Tür } i\text{”} \\ A &= \text{“Kandidat bleibt bei seiner Entscheidung”} \end{aligned}$$

Offenbar gilt $P(T_i) = 1/3$ $(i = 1{,}2{,}3)$. Weiter nehmen wir an, dass A von T_1, T_2 und T_3 unabhängig ist. (Der Kandidat weiß ja nicht, hinter welcher Tür sich das Auto befindet.) Dann gilt

$$\begin{aligned} P(\text{“Kandidat gewinnt Auto”}) &= P\big((T_1 \cap A) + (T_2 \cap A^c) + (T_3 \cap A^c)\big) \\ &= P(T_1 \cap A) + P(T_2 \cap A^c) + P(T_3 \cap A^c) \\ &= P(T_1)P(A) + P(T_2)\big(1 - P(A)\big) + P(T_3)\big(1 - P(A)\big) \\ &= 1/3 \cdot P(A) + 1/3 - 1/3 \cdot P(A) + 1/3 - 1/3 \cdot P(A) \\ &= 2/3 - 1/3 \cdot P(A). \end{aligned}$$

Also wäre offenbar $P(A) = 0$ optimal, man sollte immer wechseln.

Hausübung

Aufgabe 20. Es sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$. Weiter sei A das Ereignis, dass ein bestimmter Fluss verschmutzt ist, B das Ereignis, dass ein Test des Flusswassers eine Verschmutzung entdeckt, und C das Ereignis, dass das Fischen im Fluss erlaubt ist. Es sei

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.3, && P(C|A \cap B) = 0.20, && P(C|A^c \cap B^c) = 0.90, \\ &P(B|A) = 0.75, && P(C|A \cap B^c) = 0.80, && P(B|A^c) = 0.20. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $P(A \cap B \cap C)$.

(b) Bestimmen Sie $P(B^c \cap C)$.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass der Fluss verschmutzt ist, wenn bekannt ist, dass Fischen erlaubt ist und ein Test keine Verschmutzung angezeigt hat.

(1/2/1 Punkte)

Lösung. (a) Nach der Multiplikationsregel gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A) \\ &= 0.2 \cdot 0.75 \cdot 0.3 \\ &= 0.045 \end{aligned}$$

(b)

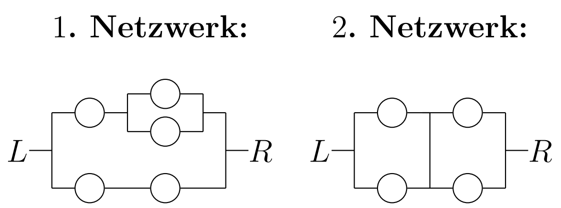
$$\begin{aligned} P(B^c \cap C) &= P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B^c \cap C) \\ &= P(C|A \cap B^c) \cdot P(A \cap B^c) + P(C|A^c \cap B^c) \cdot P(A^c \cap B^c) \\ P(A \cap B^c) &= P(B^c|A) \cdot P(A) \\ &= (1 - P(B|A)) \cdot P(A) = (1 - 0.75) \cdot 0.3 = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075 \\ P(A^c \cap B^c) &= P(B^c|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= (1 - P(B|A^c)) \cdot P(A^c) = (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.3) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56 \end{aligned}$$

Insgesamt also $P(B^c \cap C) = 0.8 \cdot 0.075 + 0.9 \cdot 0.56 = 0.564$

(c) Bestimmt werden soll $P(A|B^c \cap C)$.

$$\begin{aligned} P(A|B^c \cap C) &= \frac{P(A \cap B^c \cap C)}{P(B^c \cap C)} \\ &= \frac{P(C|A \cap B^c) \cdot P(A \cap B^c)}{P(B^c \cap C)} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.075}{0.564} = 0.106 \end{aligned}$$

Aufgabe 21. Zwei Netzwerke bestehen aus mehreren wie im nachfolgenden Diagramm angeordneten Schaltern, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$, geschlossen sind.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

i) im ersten

ii) im zweiten

Netzwerk ein Strom von L nach R fließen kann.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von p jeweils an, bei welchem der beiden Netzwerke die Wahrscheinlichkeit, dass ein Strom fließt, größer ist.

(3/1 Punkte)

Lösung. a) $q := 1 - p$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Schalter nicht geschlossen ist. Damit ist q^2 die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass zwei Schalter nicht geschlossen sind.

i) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Strom über den 'oberen Pfad' fließen kann, beträgt $p \cdot (1 - q^2)$. Analog beträgt sie für den 'unteren Pfad' p^2. Damit berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus der Unabhängigkeit und der Formel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$\begin{aligned} p \cdot (1 - q^2) + p^2 - p \cdot (1 - q^2) \cdot p^2 &= p \cdot (1 - (1 - p)^2) + p^2 - p^3(1 - (1 - p)^2) \\ &= 2p^2 - p^3 + p^2 - p^3(2p - p^2) \\ &= p^2(3 - p - 2p^2 + p^3) \end{aligned}$$

ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden vorderen Schalter nicht geschlossen sind, beträgt q^2, ebenso für die beiden hinteren. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} (1 - q^2)(1 - q^2) &= (1 - (1 - p)^2)(1 - (1 - p)^2) \\ &= (2p - p^2)^2 \\ &= p^2(2 - p)^2 \end{aligned}$$

b) Für $p \in (0,1)$ geben die beiden Polynome $p^2(3 - p - 2p^2 + p^3)$ und $p^2(2 - p)^2$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit an. Für $p = 0$ haben beide den Wert Null, für $p = 1$ beide den Wert Eins (was auch plausibel ist). Kürzt man beide Polynome mit $p^2(> 0)$, so gilt:

$$\begin{aligned} (2 - p)^2 - (3 - p - 2p^2 + p^3) &= 4 - 4p + p^2 - 3 + p + 2p^2 - p^3 \\ &= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 \\ &= (1 - p)^3 \end{aligned}$$

Dies ist für alle $p \in (0,1)$ echt größer als Null. Damit ist beim zweiten Netzwerk die Wahrscheinlichkeit immer größer.

Aufgabe 22. Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Sechs auftritt, wenn bekannt ist, dass alle drei gewürfelten Augenzahlen verschieden sind.

(3 Punkte)

Lösung. $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}^3$

A:= „mindestens eine 6“

$A^c =$ „keine 6“ $= \{(i,j,k) \in \Omega : i,j,k \neq 6\} = \{1,\ldots,5\}^3, \#A^c = 5^3 = 125$

$B = \{(i,j,k) \in \Omega : i \neq j, j \neq k, i \neq k\}$

$\#B = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (Permutation ohne Wiederholung)

$\#A^c \cap B = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{\#(A \cap B)}{\#B} \\ &= \frac{\#B - \#(A^c \cap B)}{\#B} \\ &= \frac{120 - 60}{120} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= 1 - P(A^c|B) \\ &= 1 - \frac{\#(A^c \cap B)}{\#B} \\ &= 1 - \frac{60}{120} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
46. Woche

5. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 23. Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter p. Zeigen Sie, dass

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k) \text{ für alle } n,k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beantworten Sie in diesem Zusammenhang die folgende Frage: Wenn beim wiederholten Wurf einer fairen Münze nach zwanzig Versuchen "Kopf" noch nicht erschienen ist, ist dann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Versuch "Kopf" zu erhalten, größer als 1/2?

Aufgabe 24. (negative Binomialverteilung) Ein Zufallsexperiment, in dem ein bestimmtes Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p eintritt ($0 < p < 1$), wird bis zum zweiten Eintreten von A wiederholt; X bezeichne die Anzahl der Versuchswiederholungen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X. (Man nennt die hier auftretende Verteilung auch die *negative Binomialverteilung* mit Parametern 2 und p.)

Aufgabe 25. (a) Sei X binomialverteilt mit den Parametern n und p. Berechnen Sie $P(X \text{ ist gerade})$.

(b) Sei X Poisson-verteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie $P(X \text{ ist gerade})$.

Hausübung

Aufgabe 26. (a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen; X bezeichne das Minimum der beiden erhaltenen Augenzahlen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X.

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen; X sei die Anzahl der erhaltenen Doppel-Sechsen. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt X die Werte 1, 3 und 6 an? Welche Werte liefert die Approximation dieser Verteilung durch eine Poisson-Verteilung?

Beurteilen Sie die Qualität der Approximation, indem Sie jeweils den Approximationsfehler und die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses in Relation setzen.

(3/3 Punkte)

Aufgabe 27. (Banach's matchbox problem) Herr B. war ein passionierter Pfeifenraucher und hatte stets in seiner linken und in seiner rechten Tasche jeweils eine Streichholzschachtel, die beide anfänglich n Streichhölzer enthielten. Benötigte Herr B. ein Streichholz, so wählte er eine der beiden Taschen zufällig aus und entnahm der darin befindlichen Schachtel ein Streichholz. Irgendwann war dann natürlich die gewählte Schachtel leer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt die andere Schachtel in diesem Moment noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer?

(4 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 47.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Lösungen zum

5. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 23. Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter p. Zeigen Sie, dass

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k) \text{ für alle } n,k \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beantworten Sie in diesem Zusammenhang die folgende Frage: Wenn beim wiederholten Wurf einer fairen Münze nach zwanzig Versuchen "Kopf" noch nicht erschienen ist, ist dann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Versuch "Kopf" zu erhalten, größer als 1/2?

Lösung. Es sei $X \sim \text{geom}(p)$, $p \in (0,1)$, d.h. $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es ist für $n,k \in \mathbb{N}$

$$P(X = n + k \,|\, X > n) = \frac{P(\{X = n + k\} \cap \{X > n\})}{P(\{X > n\})}.$$

Für den Nenner gilt:

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{l=n+1}^{\infty} P(X = l) = \sum_{l=n+1}^{\infty} (1-p)^{l-1}p = p\sum_{l=0}^{\infty}(1-p)^{l+n} \\ &= p(1-p)^n \sum_{l=0}^{\infty}(1-p)^l = p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n. \end{aligned}$$

Für den Zähler gilt:

$$P(\{X = n + k\} \cap \{X > n\}) = P(X = n + k) = (1-p)^{n+k-1}p.$$

Also:

$$P(X = n + k \,|\, X > n) = \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1}p = P(X = k).$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als "Gedächtnislosigkeit" der geometrischen Verteilung. Und sie beschreibt formal die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Kopfwurf nicht zunimmt, nur weil 20-mal kein Kopf erschienen ist.

Aufgabe 24. (negative Binomialverteilung) Ein Zufallsexperiment, in dem ein bestimmtes Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p eintritt ($0 < p < 1$), wird bis zum zweiten Eintreten von A wiederholt; X bezeichne die Anzahl der Versuchswiederholungen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X. (Man nennt die hier auftretende Verteilung auch die *negative Binomialverteilung* mit Parametern 2 und p.)

Lösung. Ist X die Anzahl der Versuchswiederholungen bis zum ersten Eintreten von A, so ist X geometrisch verteilt

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \text{für alle } k \geq 1.$$

Ist nun X die Anzahl der Versuchswiederholungen bis zum zweiten Eintreten von A, so gilt $X = k$ genau dann, wenn im k-ten Versuch A erscheint und genau einmal in einem der vorhergehenden Versuche A erschienen ist (hierfür gibt es $k-1$ Möglichkeiten, den entsprechenden Versuch auszuwählen). Es gilt

$$P(X = k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2 \qquad \text{für alle } k \geq 2.$$

Sei nun X die Anzahl der Versuchswiederholungen bis zum r-ten Eintreten von A, so gilt $X = k$ genau dann, wenn im k-ten Versuch A erscheint und in den vorhergehenden $k-1$ Versuchen genau $r-1$ Mal A erschienen ist. Analog zum vorigen Fall ergibt sich

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r \qquad \text{für alle } k \geq r.$$

Man nennt X dann *negativ binomialverteilt* mit den Parametern r und p. $X \sim \mathrm{Nb}(r,p)$. Es gilt also $\mathrm{geom}(p) = \mathrm{Nb}(1,p)$.

Aufgabe 25. (a) Sei X binomialverteilt mit den Parametern n und p. Berechnen Sie $P(X \text{ ist gerade})$.

(b) Sei X Poisson-verteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie $P(X \text{ ist gerade})$.

Lösung. (a) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0,\ldots,n$.

$$P(X \text{ ist gerade}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \ ?$$

Idee:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1.$$

Eliminiere alle ungeraden Terme mit

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} = (-p + (1-p))^n = (1-2p)^n.$$

Addieren:

$$2 \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 + (1-2p)^n,$$

also

$$P(X \text{ ist gerade}) = \frac{1}{2}\left(1 + (1-2p)^n\right).$$

(b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathrm{N}_0$.

$$P(X \text{ ist gerade}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Wieder die gleiche Idee: Eliminiere alle ungeraden Terme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-2\lambda},$$

durch Addition

$$2 \cdot P(X \text{ ist gerade}) = 1 + e^{-2\lambda},$$

also

$$P(X \text{ ist gerade}) = \frac{1}{2}\Big(1 + e^{-2\lambda}\Big).$$

Hausübung

Aufgabe 26. (a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen; X bezeichne das Minimum der beiden erhaltenen Augenzahlen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X.

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen; X sei die Anzahl der erhaltenen Doppel-Sechsen. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt X die Werte 1, 3 und 6 an? Welche Werte liefert die Approximation dieser Verteilung durch eine Poisson-Verteilung?

Beurteilen Sie die Qualität der Approximation, indem Sie jeweils den Approximationsfehler und die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses in Relation setzen.

(3/3 Punkte)

Lösung. (a) Es bezeichne X_1 das Ergebnis des ersten Würfelwurfes und X_2 das Ergebnis des zweiten Würfelwurfes. Dann sind X_1 und X_2 unabhängig und jeweils gleichverteilt auf der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$ und es gilt $X = \min\{X_1,X_2\} =: X_1 \vee X_2$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X. X kann die Werte 1,2,3,4,5,6 annehmen, und es gilt für $k \in \{1,...,6\}$:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(X_1 \vee X_2 = k) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\} \cup (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}) \\
&\qquad \cup (\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\})\big) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}\big) \\
&\quad + P\big(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\}\big), \text{ da diese Ereignisse disjunkt sind,} \\
&= P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 > k\}\big) \\
&\quad + P\big(\{X_2 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_1 > k\}\big), \\
&\quad \text{da diese Zufallsvariablen unabhängig sind,} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} \\
&= \frac{1+6-k+6-k}{36} \\
&= \frac{13-2k}{36}.
\end{aligned}$$

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen. X bezeichne die Anzahl der erhalten Doppel-Sechsen. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 36$ und $p = 1/36$, kurz $X \sim \text{Bin}(36,1/36)$. Dementsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert k annimmt für alle $k = 0,1,...,36$ zu:

$$P(X=k) = \binom{36}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k}.$$

Insbesondere gilt:

$$P(X=1) = \binom{36}{1} \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(\frac{35}{36}\right)^{35} \approx 0.3731,$$

$$P(X=3) = \binom{36}{3} \left(\frac{1}{36}\right)^3 \left(\frac{35}{36}\right)^{33} \approx 0.0604,$$

$$P(X=6) = \binom{36}{6} \left(\frac{1}{36}\right)^6 \left(\frac{35}{36}\right)^{30} \approx 0.0003843.$$

Das Gesetz der seltenen Ereignisse (Lemma 3.1) besagt nun, dass man bei "großem" n und "kleinem" p die Verteilung $\text{Bin}(n,p)$ durch die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ approximieren kann. In unserem Falle ist also $\lambda = n \cdot p = 36 \cdot (1/36) = 1$ zu wählen. Ist $\tilde{X}$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 1$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $P(\tilde{X} = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Dementsprechend ergeben sich hier folgende Approximationen:

$$P(\tilde{X} = 1) = e^{-1} \cdot \frac{1}{1!} \approx 0.3679,$$

$$P(\tilde{X} = 3) = e^{-1} \cdot \frac{1}{3!} \approx 0.0613,$$

$$P(\tilde{X} = 6) = e^{-1} \cdot \frac{1}{6!} \approx 0.0005109.$$

Man stellt fest, dass die Approximationen kleinerer Wahrscheinlichkeiten einen größeren relativen Fehler aufweisen; es gilt

$$\frac{|P(X = 1) - P(\tilde{X} = 1)|}{|P(X = 1)|} \approx \frac{|0.3731 - 0.3679|}{|0.3731|} \approx 1.4\%,$$

$$\frac{|P(X = 3) - P(\tilde{X} = 3)|}{|P(X = 3)|} \approx \frac{|0.0604 - 0.0613|}{|0.0.0604|} \approx 1.5\%,$$

$$\frac{|P(X = 6) - P(\tilde{X} = 6)|}{|P(X = 6)|} \approx \frac{|0.0003843 - 0.0005109|}{|0.0003843|} \approx 32.9\%.$$

Die Approximation der Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung wird also bei Werten für k, die nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auftreten, zunehmend schlechter.

Aufgabe 27. (Banach's matchbox problem) Herr B. war ein passionierter Pfeifenraucher und hatte stets in seiner linken und in seiner rechten Tasche jeweils eine Streichholzschachtel, die beide anfänglich n Streichhölzer enthielten. Benötigte Herr B. ein Streichholz, so wählte er eine der beiden Taschen zufällig aus und entnahm der darin befindlichen Schachtel ein Streichholz. Irgendwann war dann natürlich die gewählte Schachtel leer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt die andere Schachtel in diesem Moment noch genau k ($0 \leq k \leq n$) Streichhölzer?

(4 Punkte)

Lösung. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k ($0 \leq k \leq n$) Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch, dass B. vor dem $(2n - k + 1)$. Versuch bereits n Mal in seine linke Tasche gegriffen hat und nun im $(2n - k + 1)$. Versuch zum $(n + 1)$. Mal in die linke Tasche greift. Es gibt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten, die n Versuche, in denen B. in seine linke Tasche greift, auf die ersten $2n-k$ Versuche zu verteilen. Jede dieser Möglichkeiten hat jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeit $(1/2)^{2n-k+1}$ und es ergibt sich:

$$p_1 = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Sei nun p_2 das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s rechter Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner linken Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind. Aus Symmetriegründen gilt $p_1 = p_2$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Zweite Lösung. Wir berechnen zunächst wieder die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als dass eine mit den Parametern $r = n+1$ und $p = 1/2$ negativ binomialverteilte ZV (Anzahl der Versuche, bis zum $(n+1)$. Mal in die linke Tasche gegriffen wird) den Wert $2n-k+1$ annimmt. Dann gilt

$$p_1 = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Mit den gleichen Symmetrieüberlegungen wie oben ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

(Anmerkung: Die negative Binomialverteilung wurde in Aufgabe 22 eingeführt.)

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
47. Woche

6. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 28. (a) Es sei X gleichverteilt auf den Zahlen $\{1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$ von X.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(z^X)$ für $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, $|z| \le 1$.

(c) Es bezeichne X_n die Anzahl der Fixpunkte bei einer zufälligen Permutation von n Elementen. Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X_n)$.

Aufgabe 29. Eine Zufallsvariable X nehme die Werte 0,1,2,... an und habe einen endlichen Erwartungswert, d.h. $\mathrm{E}(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X \ge j).$$

Hausübung

Aufgabe 30. (a) Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X}.$$

(b) Sei X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n, d.h.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \;\; k = 0,\dots,\min\{M,n\}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(2/2 Punkte)

Aufgabe 31. Ein fairer Würfel wird n mal nacheinander geworfen (Laplace-Modell (Ω,P) mit $\Omega = \{1,\dots,6\}^n$). Die Zufallsvariable Y_n sei die größte der geworfenen Augenzahlen, also $Y_n(\omega_1,\dots,\omega_n) := \max_{1\le j\le n} \omega_j$, $(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}Y_n$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = 6.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0.$$

(3/3 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 48.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
47. Woche

Lösungen zum

6. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 28. (a) Es sei X gleichverteilt auf den Zahlen $\{1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$ von X.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(z^X)$ für $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, $|z| \le 1$.

(c) Es bezeichne X_n die Anzahl der Fixpunkte bei einer zufälligen Permutation von n Elementen. Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X_n)$.

Lösung. (a) Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \qquad \text{und} \\ \mathrm{E}(X^2) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\mathrm{E}\, z^X = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} z^k p = \frac{zp}{1-(1-p)z}.$$

(c) Es sei I_{nk} die Indikatorvariable, dass Position k ein Fixpunkt der Permutation ist. Dann ist $X_n = I_{n1} + \ldots + I_{nn}$ und somit aus Symmetriegründen

$$\mathrm{E}\, X_n = \mathrm{E}I_{n1} + \ldots + \mathrm{E}I_{nn} = n\mathrm{E}I_{n1} = n\frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

Dieses Problem entspringt dem Problem des verwirrten Postboten aus der Vorlesung. X_n ist dabei die Anzahl der Personen, die den korrekten Brief erhalten, I_{nk} ist 1 genau dann, wenn die k. Person den korrekten Brief erhält, 0 sonst.

Aufgabe 29. Eine Zufallsvariable X nehme die Werte $0,1,2,\dots$ an und habe einen endlichen Erwartungswert, d.h. $\mathrm{E}(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j).$$

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}(j \leq k)P(X=k) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}(j \leq k)P(X=k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} P(X=k) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j)
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe 30. (a) Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X}.$$

(b) Sei X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n, d.h.

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \;\; k = 0,\dots,\min\{M,n\}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(2/2 Punkte)

Lösung. (a) Es gilt $Y + Z = 1$, also $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Y+Z) = \mathrm{E}(1) = 1$. Wir brauchen also nur einen der beiden Erwartungswerte explizit auszurechnen. Wir entscheiden uns für den von Y und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot P(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right) \;=\; \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{E}(Z) = 1 - \mathrm{E}(Y)$ folgt dann

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \;=\; \frac{\lambda - 1 + e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{k \cdot M! \cdot (N-M)! \cdot n! \cdot (N-n)!}{k! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N!} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{M \cdot (M-1)! \cdot (N-M)! \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (N-n)!}{(k-1)! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N \cdot (N-1)!} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \frac{\binom{M-1}{k}\binom{N-M}{(n-1)-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot 1 = \frac{M \cdot n}{N}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 31. Ein fairer Würfel wird n mal nacheinander geworfen (Laplace-Modell (Ω,P) mit $\Omega = \{1,\ldots,6\}^n$). Die Zufallsvariable Y_n sei die größte der geworfenen Augenzahlen, also $Y_n(\omega_1,\ldots,\omega_n) := \max_{1\le j\le n} \omega_j$, $(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}Y_n$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = 6.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0.$$

(3/3 Punkte)

Lösung. (a) Mit Aufgabe 29 folgt

$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{6} P(Y_n \ge k) = 6 - \sum_{k=1}^{6} P(Y_n < k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} P(Y_n \le k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n$$

und damit die Behauptung. Alternative kann man diese Aussage auch ohne direkte Berechnung des Erwartungswertes erhalten: Es ist $\mathrm{E}(Y_n) \le 6$ und $\mathrm{E}(Y_n) \ge 6P(Y_n = 6)$. Es gilt $P(Y_n = 6) = 1 - P(Y_n \le 5) = 1 - (5/6)^n$, womit die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{E}((Y_n - \mathrm{E}(Y_n))^2) = (6-\mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = 6) + \sum_{j=1}^{5} (j-\mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = j).$$

Wegen $P(Y_n = 6) \to 1$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) gilt $P(Y_n = j) \to 0$ für $n \to \infty$ und $j = 1,\ldots,5$. Zusammen mit $\mathrm{E}(Y_n) \to 6$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) folgt die Behauptung.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

7. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 32. Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2) & \text{, falls } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{, falls } |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat die Konstante c?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie $P(-0.5 < X < 0)$ und $P(X > 0 \mid X > -0.5)$.

Aufgabe 33. (a) Es sei X eine Zufallsgröße mit stetiger Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu $Y := X^2$.

(b) Es sei Y der Flächeninhalt eines Quadrats mit zufälliger Seitenlänge X, wobei X exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen Sie die Dichte f und die Verteilungsfunktion F von Y.

Hausübung

Aufgabe 34. Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1+x)^{-1} & \text{, falls } 0 \le x \le \mathrm{e}^2 - 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat die Konstante c?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Es sei $\varepsilon \in (0, \mathrm{e} - 1)$. Bestimmen Sie $P(\varepsilon \le X < \mathrm{e} - 1)$.

In welchem Intervall muss ε liegen, damit diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$ ist?

(d) Berechnen Sie $P(X > \frac{3}{2}\mathrm{e} - 1 \mid X > \mathrm{e} - 1)$.

(1/2/2/1 Punkte)

Aufgabe 35. (Zerbrechende Stäbe)
Ein Stab der Länge 1 möge an einer zufälligen Stelle zerbrechen. Genauer wollen wir annehmen, dass alle Bruchpositionen gleichwahrscheinlich sind, d.h. der Abstand X des Bruchpunktes vom linken Endpunkt des Stabes sei unif(0,1)-verteilt.

Sei Y die Länge des kürzeren Bruchstückes (das natürlich nicht immer wie in der Skizze das rechte zu sein braucht). Dann ist Y wieder eine Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren, also $Y/(1-Y)$, kleiner oder gleich 1/4?

(3/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 49.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
48. Woche

Lösungen zum

7. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 32. Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1-x^2) & , \text{ falls } |x| \le 1, \\ 0 & , \text{ falls } |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat die Konstante c?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie $P(-0.5 < X < 0)$ und $P(X > 0 \mid X > -0.5)$.

Lösung. (a) Es muss gelten $\int f(x)\,dx = 1$.

$$\int f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c \cdot (1-x^2)\,dx = c \cdot \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = c \cdot \frac{4}{3} \overset{!}{=} 1,$$

also $c = 3/4$.

(b) Durch Integrieren erhält man als Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(c) Es ist

$$P(-0.5 < X < 0) = \int_{-0.5}^{0} f(x)\,dx = ... = \frac{11}{32}$$

und

$$\begin{aligned} P(X > 0 | X > -0.5) &= \frac{P(X > 0 \text{ und } X > -0.5)}{P(X > -0.5)} \\ &= \frac{P(X > 0)}{P(X > -0.5)} = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_{-0.5}^1 f(x)\,dx} = ... = \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

Aufgabe 33. (a) Es sei X eine Zufallsgröße mit stetiger Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu $Y := X^2$.

(b) Es sei Y der Flächeninhalt eines Quadrats mit zufälliger Seitenlänge X, wobei X exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen Sie die Dichte f und die Verteilungsfunktion F von Y.

Lösung. (a) Für $y \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wurde von der Stetigkeit der Verteilungsfunktion F Gebrauch gemacht.

(b) Es gelte nun $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h. X habe Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist F_X stetig, genügt also insbesondere den Voraussetzungen von Teil (a). Damit ergibt für die Verteilungsfunktion F von $Y = X^2$ im Falle $y \geq 0$:

$$F(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}.$$

Die Dichte von Y ergibt sich durch Differenzieren:

$$f(y) = F'(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} \exp(-\lambda\sqrt{y}), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Hausübung

Aufgabe 34. Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1+x)^{-1} & \text{, falls } 0 \leq x \leq \mathrm{e}^2 - 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat die Konstante c?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Es sei $\varepsilon \in (0, \mathrm{e} - 1)$. Bestimmen Sie $P(\varepsilon \leq X < \mathrm{e} - 1)$.

In welchem Intervall muss ε liegen, damit diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$ ist?

(d) Berechnen Sie $P(X > \frac{3}{2}\mathrm{e} - 1 \mid X > \mathrm{e} - 1)$.

(1/2/2/1 Punkte)

Lösung. (a) Es muss gelten $\int f(x)\,dx = 1$.

$$\int_0^{e^2-1} \frac{c}{1+x}\,dx = c\cdot\log(1+x)\Big|_0^{e^2-1} = c\cdot(\log(1+e^2-1)-\log(1)) = c\cdot 2 \overset{!}{=} 1,$$

also $c=\frac{1}{2}$.

(b) Durch Integrieren erhält man als Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}\log(1+x), & 0\le x\le e^2-1, \\ 1, & x>e^2-1. \end{cases}$$

(c) Es gilt:

$$P(\varepsilon \le X < e-1) = F(e-1)-F(\varepsilon) = \frac{1}{2}\cdot(\log(1+e-1)-\log(1+\varepsilon)) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log(1+\varepsilon)$$

Dies soll kleiner als $\frac{1}{4}$ sein, also

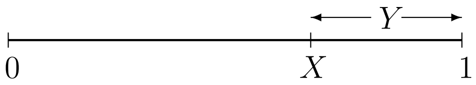
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log(1+\varepsilon) &\overset{!}{<} \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} &< \log(1+\varepsilon) \Leftrightarrow \\ e^{\frac{1}{2}}-1 &< \varepsilon \end{aligned}$$

Es muss also gelten $\varepsilon \in (e^{\frac{1}{2}}-1, e-1)$.

(d)

$$\begin{aligned} P(X>\frac{3}{2}e-1|X>e-1) &= \frac{P(X>\frac{3}{2}e-1 \text{ und } X>e-1)}{P(X>e-1)} \\ &= \frac{P(X>\frac{3}{2}e-1)}{P(X>e-1)} \\ &= \frac{1-F(\frac{3}{2}e-1)}{1-F(e-1)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2}\log(1+\frac{3}{2}e-1)}{1-\frac{1}{2}\log(1+e-1)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2}(1+\log(\frac{3}{2}))}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2-1-\log(\frac{3}{2}) \\ &= 1-\log(\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

Aufgabe 35. (Zerbrechende Stäbe)
Ein Stab der Länge 1 möge an einer zufälligen Stelle zerbrechen. Genauer wollen wir annehmen, dass alle Bruchpositionen gleichwahrscheinlich sind, d.h. der Abstand X des Bruchpunktes vom linken Endpunkt des Stabes sei unif(0,1)-verteilt.



Sei Y die Länge des kürzeren Bruchstückes (das natürlich nicht immer wie in der Skizze das rechte zu sein braucht). Dann ist Y wieder eine Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren, also $Y/(1-Y)$, kleiner oder gleich $1/4$?

(3/2 Punkte)

Lösung. (a) Es gilt $X \sim \text{unif}(0,1)$ und $Y = \min\{X, 1-X\}$. Y kann offenbar nur Werte im Intervall $[0,1/2]$ annehmen und es gilt

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= 1 - P(Y > y) \\
&= 1 - P(\min\{X, 1-X\} > y) \\
&= 1 - P(X > y \text{ und } 1 - X > y) \\
&= 1 - P(X > y \text{ und } X < 1 - y) \\
&= 1 - P(y < X < 1 - y) \\
&= 1 - P(X \in [y, 1-y]), \text{ das Intervall } [y, 1-y] \text{ hat die Länge } 1 - 2y, \\
&= 1 - (1 - 2y) \\
&= 2y.
\end{aligned}$$

Es ist also $Y \sim U(0,1/2)$.

(b) Das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren ist $Y/(1-Y)$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{Y}{1-Y} \leq \frac{1}{4}\right) &= P(4Y \leq 1 - Y) \\
&= P(5Y \leq 1) \\
&= P\left(Y \leq \frac{1}{5}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{5} \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

8. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 36. Beweisen Sie: Für jede Zufallsvariable X mit existierendem 2. Moment wird die Funktion

$$\mathbb{R} \ni a \longmapsto E\big(X-a\big)^2 \in \mathbb{R}$$

durch $a = EX$ minimiert.

Aufgabe 37. Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X), E(X^2)$ und $\mathrm{var}(X)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest und $Y := \min\{X,a\}$. Bestimmen Sie

   (i) den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ und

   (ii) die Varianz $\mathrm{var}(Y)$

   von Y.

(c) Es sei $M_X(t) := E\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$.

   (i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $M_X(t)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

   (ii) Berechnen Sie für $k = 1, 2$ die k-te Ableitung von $M_X(t)$ an der Stelle 0, $M_X^{(k)}(0)$, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabenteil a).

Hinweis: Es gelten

$$\int x\lambda \exp(-\lambda x)\, dx = -x \exp(-\lambda x) - \frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda x)$$

und

$$\int x^2\lambda \exp(-\lambda x)\, dx = -\exp(-\lambda x)(x^2 + \frac{2}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda^2}).$$

Hausübung

Aufgabe 38. (*Gamma-Verteilung*)
Die *Gamma-Verteilung* mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$) ist die Verteilung auf $(0,\infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x},\ \ x > 0.$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ die *Gammafunktion.*

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(b) Bestimmen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(c) Zeigen Sie, daß sich die *Exponentialverteilung* als Spezialfall der *Gamma-Verteilung* ergibt.

(2/2/1 Punkte)

Aufgabe 39. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Bestimmen Sie $E(|X|)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $M_X(t) := E\big(e^{tX}\big)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$ von X mithilfe von $M_X(t)$ analog zu Aufgabe 37c).

(2/2/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 50.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
49. Woche

Lösungen zum

8. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 36. Beweisen Sie: Für jede Zufallsvariable X mit existierendem 2. Moment wird die Funktion

$$\mathbb{R} \ni a \longmapsto E\big(X-a\big)^2 \in \mathbb{R}$$

durch $a = EX$ minimiert.

Lösung. Definiere

$$\varphi(a) := E(X-a)^2.$$

Dann geht es in dieser Aufgabe um nichts anderes, als das globale Minimum dieser Funktion zu bestimmen. Durch Ausquadrieren erhalten wir

$$\varphi(a) = EX^2 - 2aEX + a^2.$$

Es handelt sich also um eine nach oben geöffnete Parabel. Das globale Minimum ist also der Punkt, bei dem die Ableitung verschwindet, also $a = EX$.

Aufgabe 37. Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X), E(X^2)$ und $\mathrm{var}(X)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest und $Y := \min\{X,a\}$. Bestimmen Sie

  (i) den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ und

  (ii) die Varianz $\mathrm{var}(Y)$

  von Y.

(c) Es sei $M_X(t) := E\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$.

  (i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $M_X(t)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

  (ii) Berechnen Sie für $k = 1,2$ die k-te Ableitung von $M_X(t)$ an der Stelle 0, $M_X^{(k)}(0)$, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Aufgabenteil a).

Hinweis: Es gelten

$$\int x\lambda\exp(-\lambda x)\,dx = -x\exp(-\lambda x) - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda x)$$

und

$$\int x^2\lambda\exp(-\lambda x)\,dx = -\exp(-\lambda x)(x^2 + \frac{2}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda^2}).$$

Lösung. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h. X hat die Dichte $\varphi_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty)}(x)$.

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x\lambda \exp(-\lambda x)\,dx \\ &= [-x\exp(-\lambda x) - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda x)]\big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2\lambda \exp(-\lambda x)\,dx \\ &= [-\exp(-\lambda x)(x^2 + \frac{2}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda^2})]\big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Varianz:

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(b) (i) Sei nun $f(X) := \min\{X,a\}$. Ist $a \leq 0$, so ist $f(X(\omega)) \equiv a$, also auch $Ef(X) = a$. Für $a > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} Ef(X) &= \int_0^\infty f(x)\varphi_X(x)\,dx = \int_0^\infty \min\{x,a\}\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \int_0^a x\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx + \int_a^\infty a\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \ldots = \frac{1}{\lambda}\big(1 - \exp(-\lambda a)\big). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$. $\mathrm{E}(Y)$ wurde in (i) berechnet.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y^2) &= \mathrm{E}(f(X)^2) \\ &= \int_0^\infty (\min\{x,a\})^2\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \int_0^a x^2\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx + \int_a^\infty a^2\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \ldots = -\exp(-\lambda a)\big(\frac{2}{\lambda}a + \frac{2}{\lambda^2}\big) + \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Varianz:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda a)\big(2a + \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda a)\big) \end{aligned}$$

(c) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= \int_0^\infty \lambda \exp\big((t-\lambda)x\big)\, dx \\ &= \begin{cases} \infty, & t \geq \lambda, \\ \frac{\lambda}{\lambda - t}, & t < \lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Also: $M_X(t) = E(e^{tX})$ existiert genau dann, wenn $t < \lambda$, und dann gilt

$$E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

(ii) Für $t < \lambda$ gilt nach b) $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$. Dann existiert auch die Ableitung und es gilt:

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \\ M_X'(0) &= \frac{1}{\lambda} \\ M_X''(t) &= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \\ M_X''(0) &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Es gilt also $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$ für $k = 1, 2$. Dies lässt sich auf beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und andere Verteilungen von X erweitern. $M_X(t)$ heißt die *momenterzeugende Funktion von X*.

Hausübung

Aufgabe 38. (*Gamma-Verteilung*)
Die *Gamma-Verteilung* mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$) ist die Verteilung auf $(0,\infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}, \;\; x > 0.$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ die *Gammafunktion*.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(b) Bestimmen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(c) Zeigen Sie, daß sich die *Exponentialverteilung* als Spezialfall der *Gamma-Verteilung* ergibt.

(2/2/1 Punkte)

Lösung. (a) Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Mit der Substuitution $y = \lambda x$ folgt:

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^\infty x \cdot f_{\alpha,\lambda}(x)dx \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha \lambda^\alpha e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy \;=\; \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert für alle $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \\
&= -x^\alpha e^{-x}\big|_0^\infty + \alpha \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \alpha \cdot \Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt $EX = \alpha/\lambda$.

(b) Analog zu Teil (a) erhält man

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot f_{\alpha,\lambda}(x)dx \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy \;=\; \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \;=\; \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

(c) Beim Vergleich der Dichtefunktionen erweist sich die *Exponentialverteilung* mit Parameter λ als Spezialfall der *Gamma-Verteilung*, und zwar für den Parameter $\alpha = 1$.

Aufgabe 39. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Bestimmen Sie $E(|X|)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $M_X(t) := E\big(e^{tX}\big)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$ von X mithilfe von $M_X(t)$ analog zu Aufgabe 37c).

(2/2/2 Punkte)

Lösung. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Dann gilt

$$\begin{aligned}
E|X| &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx \;=\; -\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx \\
&= 2 \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(- e^{-x^2/2} \big)\Big|_0^{\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(0 - (-1)\big) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

(b) Sei φ_{μ,σ^2} die Dichte zu $N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
E\big(e^{tX}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \varphi_{0,1}(x) dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-t)^2/2} \cdot e^{t^2/2} dx \;=\; e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-t)^2/2} dx \\
&= e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{t,1}(x) dx \;=\; e^{t^2/2} < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(c) $M_X(t) = e^{t^2/2}$.

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= e^{t^2/2} \cdot t \\
M_X'(0) &= 0 \\
M_X''(t) &= e^{t^2/2} + t^2 \cdot e^{t^2/2} \\
M_X''(0) &= 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

$EX = M_X'(0) = 0$. Für die Varianz gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= M_X''(0) - (M_X'(0))^2 \\
&= 1 - 0^2 = 1
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
50. Woche

9. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 40. Ein fairer sechseitiger Würfel werde zweimal geworfen, X_1 bzw. X_2 seien die Augenzahlen beim ersten bzw. beim zweiten Wurf. Es sei bekannt, dass $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$ sieben beträgt. Weiter bezeichnen $Y_1 := \min\{X_1,X_2\}$ und $Y_2 := \max\{X_1,X_2\}$.

(a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von Y_1 und Y_2 sowie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von Y_1 und Y_2 tabellarisch dar.

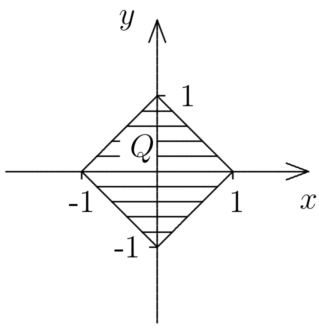
(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(Y_2 - Y_1)$ und $\mathrm{E}(Y_1 + Y_2)$.

(c) Sind Y_1 und Y_2 unabhängig?

Aufgabe 41. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y sei auf der in der Abbildung angegebenen Fläche konstant und verschwinde außerhalb dieser Fläche.

(a) Bestimmen Sie die Randdichten f_X bzw. f_Y zu den Zufallsvariablen X bzw. Y.

(b) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?



Hausübung

Aufgabe 42. In einer Urne befinden sich vier Kugeln, die mit den Nummern 1 bis 4 nummeriert sind. Die Kugeln werden in zufälliger Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen. Es sei X_i die Nummer der als i-tes gezogenen Kugel, $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

(a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich und wie sind sie verteilt?

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X_1 und X_2.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz von X_1 und X_2.

(1/2/3 Punkte)

Aufgabe 43. (Glühbirnen)
Die Lebensdauer X einer Glühbirne der Marke A sei exponentialverteilt mit Parameter λ_A, die Lebensdauer Y einer Glühbirne der Marke B sei exponentialverteilt mit Parameter λ_B. Wir setzen voraus, dass X und Y unabhängig sind.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt eine Typ B-Birne länger als eine Typ A-Birne?

(b) Was ergibt sich für $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$? Interpretieren Sie das Ergebnis!

(3/1 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 51.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
50. Woche

Lösungen zum

9. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 40. Ein fairer sechseitiger Würfel werde zweimal geworfen, X_1 bzw. X_2 seien die Augenzahlen beim ersten bzw. beim zweiten Wurf. Es sei bekannt, dass $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$ sieben beträgt. Weiter bezeichnen $Y_1 := \min\{X_1,X_2\}$ und $Y_2 := \max\{X_1,X_2\}$.

(a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von Y_1 und Y_2 sowie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von Y_1 und Y_2 tabellarisch dar.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(Y_2 - Y_1)$ und $\mathrm{E}(Y_1 + Y_2)$.

(c) Sind Y_1 und Y_2 unabhängig?

Lösung. (a) Tabellarisch ergeben sich dann die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen von Y_1 und Y_2 sowie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von Y_1 und Y_2 zu

$Y_2 \setminus Y_1$	1	2	3	4	5	6	$P(Y_2 = i)$
1	1						1
2	2	1					3
3	2	2	1				5
4	2	2	2	1			7
5	2	2	2	2	1		9
6	2	2	2	2	2	1	11
$P(Y_1 = i)$	11	9	7	5	3	1	36

(jeweils $\times 1/36$.)

(b) Die gesuchten Erwartungswerte ergeben sich zu

$$\mathrm{E}(Y_2 - Y_1) = \sum_{k=1}^{6}\sum_{l=1}^{6}(l-k)\cdot P(Y_1 = k, Y_2 = l) = \frac{70}{36},$$

Alternativ lässt sich dieser Wert auch aus $\mathrm{E}(Y_2 - Y_1) = \mathrm{E}Y_1 - \mathrm{E}Y_2 = \frac{161}{36} - \frac{91}{36}$ berechnen.

$$\mathrm{E}(Y_1 + Y_2) = \sum_{k=1}^{6}\sum_{l=1}^{6}(k+l)\cdot P(Y_1 = k, Y_2 = l) = 7.$$

Der zweite Wert ergibt sich im übrigen auch als Erwartungswert von $X_1 + X_2$, der Augensumme beim zweimaligen Wurf eines fairen Würfels. Besteht hier irgendein Zusammenhang? (Summe von min und max ist Summe der beiden Würfe)

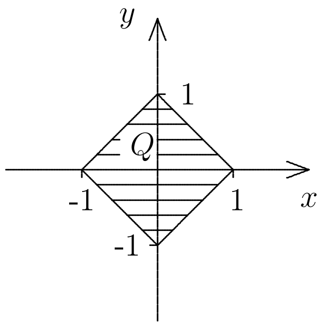
(c) Die Zufallsvariablen sind nicht unabhängig: Beispielsweise gilt

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{1}{36} \neq \frac{11}{36}\frac{1}{36} = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1).$$

Aufgabe 41. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y sei auf der in der Abbildung angegebenen Fläche konstant und verschwinde außerhalb dieser Fläche.

(a) Bestimmen Sie die Randdichten f_X bzw. f_Y zu den Zufallsvariablen X bzw. Y.

(b) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?



Lösung. (a) Da die Seitenlänge des eingezeichneten Quadrats $\sqrt{2}$ ist, besitzt Q den Flächeninhalt 2. Daraus folgt für die gemeinsame Dichte von X und Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in Q, \\ 0, & (x,y) \notin Q. \end{cases}$$

Aus der gemeinsamen Dichte können wir nun die Randdichten durch ausintegrieren gewinnen. Aus Symmetriegründen ist klar, dass X und Y dieselben Dichten besitzen, es reicht also, die Dichte von X zu berechnen. Es gilt:

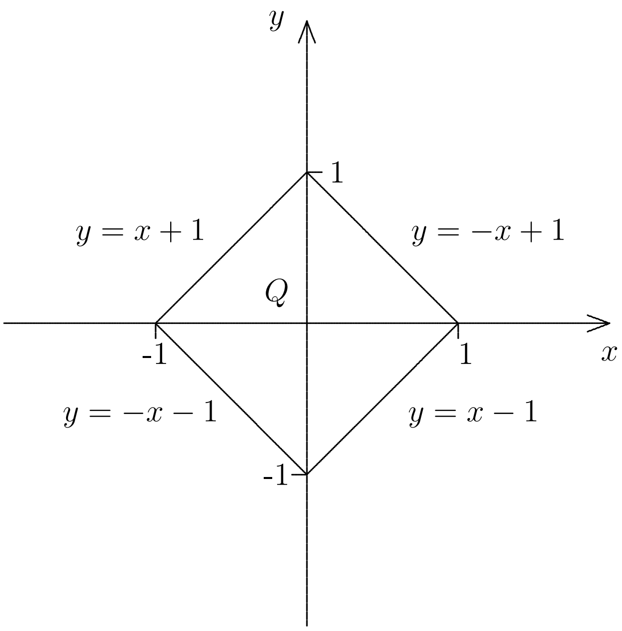
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\,1_Q(x,y)\,dy.$$

Hier bietet es sich an, eine Fallunterscheidung zu machen. Ist $-1 \le x \le 0$, so ergibt sich

$$f_X(x) = \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dy = 1 + x,$$

Ist $0 < x \le 1$, so ergibt sich entsprechend

$$f_X(x) = \int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2}\,dy = 1 - x.$$



Also ist

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Wegen $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ sind die beiden Zufallsvariablen X und Y nicht stochastisch unabhängig.

Hausübung

Aufgabe 42. In einer Urne befinden sich vier Kugeln, die mit den Nummern 1 bis 4 nummeriert sind. Die Kugeln werden in zufälliger Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen. Es sei X_i die Nummer der als i-tes gezogenen Kugel, $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

(a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich und wie sind sie verteilt?

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X_1 und X_2.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz von X_1 und X_2.

(1/2/3 Punkte)

Lösung. (a) Das Experiment liefert alle Permutationen von $\{1,2,3,4\}$. Es gibt also $4! = 24$ verschiedene Möglichkeiten und es liegt eine Gleichverteilung vor.

(b)

$X_2 \setminus X_1$	1	2	3	4	$P(X_2 = i)$
1	0	2	2	2	6
2	2	0	2	2	6
3	2	2	0	2	6
4	2	2	2	0	6
$P(X_1 = i)$	6	6	6	6	24

(jeweils $\times 1/24$.)

z.B. gibt es für $X_1 = 1, X_2 = 2$ die Möglichkeiten (1,2,3,4) und (1,2,4,3).

(c) $\operatorname{cov}(X_1,X_2) = EX_1X_2 - (EX_1)(EX_2)$

$$\begin{aligned} EX_1X_2 &= \frac{2}{24}(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \\ &\qquad 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3) \\ &= \frac{1}{12}(2+3+4+2+6+8+3+6+12+4+8+12) \\ &= \frac{70}{12} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

Weiter gilt (siehe Tabelle in (a)): $P(X_i = k) = \frac{1}{4}, i \in \{1,2\}, k \in \{1,\ldots,4\}$.

$$\begin{aligned} EX_1 &= \frac{1}{4}(1+2+3+4) \\ &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = EX_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_1,X_2) &= EX_1X_2 - (EX_1)(EX_2) \\ &= \frac{35}{6} - \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Aufgabe 43. (Glühbirnen)
Die Lebensdauer X einer Glühbirne der Marke A sei exponentialverteilt mit Parameter λ_A, die Lebensdauer Y einer Glühbirne der Marke B sei exponentialverteilt mit Parameter λ_B. Wir setzen voraus, dass X und Y unabhängig sind.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt eine Typ B-Birne länger als eine Typ A-Birne?

(b) Was ergibt sich für $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$? Interpretieren Sie das Ergebnis!

(3/1 Punkte)

Lösung. (a) Es sind $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda_A)$, $Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda_B)$. Gesucht ist $P(X < Y)$. Es gilt:

$$P(X<Y) = P\big((X,Y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x<y\}\big) = \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ x<y}} f_{X,Y}(x,y)\, d(x,y),$$

wobei $f_{X,Y}(x,y)$ die gemeinsame Dichte von X und Y bezeichnet. Da X und Y unabhängig sind, ist diese das Produkt der Randdichten, es gilt also:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_A x} e^{-\lambda_B y} \cdot 1_{\{x>0,y>0\}}(x,y).$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\\ x<y}} \lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_A x} e^{-\lambda_B y}\, dy\, dx = \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_B e^{-\lambda_B y}\, dy\, \lambda_A e^{-\lambda_A x}\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A x}\, dx = \lambda_A \int_0^\infty e^{-(\lambda_A+\lambda_B)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}.
\end{aligned}$$

(b) Für $\lambda_A = \lambda_B$ gilt dann $P(X<Y) = P(Y<X) = \frac{1}{2}$. Dies beschreibt den intuitiv klaren Sachverhalt, dass bei zwei gleichartigen Glühbirnen die betrachtete Wahrscheinlichkeit gleich ist, man also apriori keine Information darüber hat, welche zuerst durchbrennt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
51. Woche

10. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 44. Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kovarianz ein bilinearer Operator ist, d.h. es gilt

(i) $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{cov}(X,Z) + b \operatorname{cov}(Y,Z)$ und

(ii) $\operatorname{cov}(Z, aX + bY) = a \operatorname{cov}(Z,X) + b \operatorname{cov}(Z,Y)$.

(b) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion für X und Y sei in der folgenden Tabelle gegeben:

$Y \setminus X$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Benutzen Sie diese Werte zur Konstruktion eines Gegenbeispiels dafür, dass unkorrelierte Zufallsvariablen nicht notwendigerweise auch unabhängig sind.

Aufgabe 45. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} c(x+y) & \text{falls } 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Bestimmen Sie die marginalen Dichtefunktionen f_X und f_Y.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz cov von X und Y.

Hausübung

Aufgabe 46. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a,b \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Abbildung $(a,b) \longmapsto \varphi(a,b) := \mathrm{E}(X - a - bY)^2$. Für welche reellen Zahlen a, b ist φ minimal, und wie groß ist dieses Minimum?

(4 Punkte)

Aufgabe 47. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} c(x+y) & \text{falls } x,y \geq 0 \text{ und } x+y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Bestimmen Sie die marginalen Dichtefunktionen f_X und f_Y.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{E}(\frac{1}{X+Y})$.

(d) Es sei U der (zufällige) Umfang eines Rechtecks mit Seitenlängen X und Y. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu U.

(1/1.5/1.5/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 2.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
51. Woche

Lösungen zum

10. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 44. Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kovarianz ein bilinearer Operator ist, d.h. es gilt

(i) $\mathrm{cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{cov}(X,Z) + b\,\mathrm{cov}(Y,Z)$ und

(ii) $\mathrm{cov}(Z, aX + bY) = a\,\mathrm{cov}(Z,X) + b\,\mathrm{cov}(Z,Y)$.

(b) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion für X und Y sei in der folgenden Tabelle gegeben:

$Y \setminus X$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Benutzen Sie diese Werte zur Konstruktion eines Gegenbeispiels dafür, dass unkorrelierte Zufallsvariablen nicht notwendigerweise auch unabhängig sind.

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(aX + bY, Z) &= E\big((aX + bY - E(aX + bY))(Z - EZ)\big) \\
&= E\big((aX + bY - aEX - bEY)(Z - EZ)\big) \\
&= E\big((a(X - EX) + b(Y - EY))(Z - EZ)\big) \\
&= aE\big((X - EX)(Z - EZ)\big) + bE\big((Y - EY)(Z - EZ)\big) \\
&= a\,\mathrm{cov}(X,Z) + b\,\mathrm{cov}(Y,Z).
\end{aligned}$$

Die Linearität in der zweiten Komponente zeigt man genauso.

(b) Gegenbeispiel:

$Y \setminus X$	0	1	$P(Y = i)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
$P(X = i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Dann sind X und Y nicht unabhängig, denn es ist beispielsweise

$$0 = P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1) = 1/2 \cdot 2/12.$$

Andererseits sind aber X und Y unkorreliert, denn

$$E(XY) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\ E(X) = \frac{1}{2},\ E(Y) = \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{5}{12} = 1,$$

und damit

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

Aufgabe 45. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} c(x+y) & \text{falls } 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Bestimmen Sie die marginalen Dichtefunktionen f_X und f_Y.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz cov von X und Y.

Lösung. (a) Es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d(x,y) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 \overset{!}{=} \int_0^1 \int_0^1 c(x+y)\,dxdy &= c\int_0^1 (\int_0^1 x\,dx + y\int_0^1 1\,dx)dy \\ &= c\int_0^1 (\frac{1}{2} + y)dy \\ &= c(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = c \end{aligned}$$

Es gilt also $c = 1$.

(b) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}$ für $0 \leq x \leq 1$.

Aus Symmetriegründen gilt $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$ für $0 \leq y \leq 1$.

(c) Es gilt $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - (EX)(EY)$.

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^1 x f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x(x + \frac{1}{2})\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Wieder aus Symmetriegründen gilt $EX = EY$.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 (y\int_0^1 x^2\,dx + y^2 \int_0^1 x\,dx)dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 y\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Damit also $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - (EX)(EY) = \frac{1}{3} - (\frac{7}{12})^2 = \frac{-1}{144}$.

Hausübung

Aufgabe 46. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a,b \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Abbildung $(a,b) \longmapsto \varphi(a,b) := \mathrm{E}(X - a - bY)^2$. Für welche reellen Zahlen a, b ist φ minimal, und wie groß ist dieses Minimum?

(4 Punkte)

Lösung. Es ist

$$\varphi(a,b) = E(X - a - bY)^2 = EX^2 + a^2 + b^2 EY^2 - 2aEX - 2bEXY + 2abEY.$$

Um das globale Minimum von φ zu bestimmen, suchen wir zunächst nach Nullstellen der Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\varphi(a,b) &= 2a - 2EX + 2bEY \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial}{\partial b}\varphi(a,b) &= 2bEY^2 - 2EXY + 2aEY \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert $a = EX - bEY$, einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\tilde{b} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)},$$

sofern $\operatorname{var}(Y) \neq 0$, und wenn man dies wieder in der ersten Gleichung verwendet, ergibt sich

$$\tilde{a} = EX - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)} EY.$$

Dies ist die einzige kritische Stelle von φ. Mit einigen Zusatzüberlegungen kann man sich überlegen, dass es sich in diesem Fall tatsächlich um das globale Minimum handelt.

Der Funktionswert im Minimum lautet:

$$\begin{aligned}
\varphi(\tilde{a},\tilde{b}) &= E\left(X - EX + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)} EY - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)} Y\right)^2 \\
&= \operatorname{var}(X) + \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{\operatorname{var}^2(Y)} \operatorname{var}(Y) - 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)} \operatorname{cov}(X,Y) \\
&= \operatorname{var}(X) - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)}.
\end{aligned}$$

Was passiert im Falle $\operatorname{var}(Y) = 0$? In diesem Fall ist $P(Y = EY) = 1$; man kann zeigen, dass in diesem Fall φ auf der gesamten Geraden $a = EX - bEY$ minimal wird.

Die folgende Lösung ist zwar etwas trickreicher, jedoch besser zu überblicken: Es ist:

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= E(X-a-bY)^2 = E\big((X-bY)-E(X-bY)+E(X-bY)-a\big)^2 \\
&= \operatorname{var}(X-bY) + 2\underbrace{E\Big(\big((X-bY)-E(X-bY)\big)\big(E(X-bY)-a\big)\Big)}_{=0} + \\
&\quad E\big(E(X-bY)-a\big)^2 \\
&= \operatorname{var}(X-bY) + E\big(E(X-bY)-a\big)^2.
\end{aligned}$$

Der erste Term hängt nun nur noch von b ab. Es gilt:

$$\operatorname{var}(X-bY) = \operatorname{var}(X) + b^2\operatorname{var}(Y) - 2b\operatorname{cov}(X,Y).$$

Dies ist in Abhängigkeit von b eine nach oben geöffnete Parabel, sofern $\operatorname{var}(Y) \neq 0$ gilt, diese wird dort minimal, wo die Ableitung verschwindet, also bei

$$\tilde{b} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)}.$$

Der hintere Term

$$E\big(E(X-bY)-a\big)^2$$

ist stets nicht-negativ, wird also minimal, wenn er verschwindet, und dies ist offenbar der Fall, wenn man $a = E(X-bY)$ wählt. Dies führt dann auf

$$\tilde{a} = EX - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(Y)}EY.$$

Ist $\operatorname{var}(Y) = 0$, so ist sofort auch $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, der vordere Term ist nun konstant, der hintere Term wird auf der gesamten Geraden $a = E(X-bY)$ minimal.

Aufgabe 47. Es seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} c(x+y) & \text{falls } x,y \geq 0 \text{ und } x+y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Bestimmen Sie die marginalen Dichtefunktionen f_X und f_Y.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{E}(\frac{1}{X+Y})$.

(d) Es sei U der (zufällige) Umfang eines Rechtecks mit Seitenlängen X und Y. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu U.

(1/1.5/1.5/2 Punkte)

Lösung. (a) Es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d(x,y) = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x} c(x+y)\,dy\,dx &= c\int_0^1 (xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} \\ &= c\int_0^1 \frac{1}{2}-\frac{x^2}{2} \\ &= c(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = c\frac{1}{3} \overset{!}{=} 1\end{aligned}$$

Für c ergibt sich also der Wert Drei.

(b) Für $0 \le x \le 1$ gilt:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dy \\ &= \int_0^{1-x} 3(x+y)\,dy \\ &= 3(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} \\ &= \frac{3}{2}(1-x^2)\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt dann auch: $f_Y(y) = \frac{3}{2}(1-y^2)$ für $0 \le y \le 1$. Außerhalb der angegebenen Bereiche haben die Dichten jeweils den Wert Null.

(c)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\frac{1}{X+Y}) &= \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{1}{x+y}3(x+y)\,dy\,dx \\ &= 3\int_0^1\int_0^{1-x} 1\,dx\,dy \\ &= 3\int_0^1 1-y\,dy = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(d) $U = 2(X+Y)$ kann wegen $X,Y \ge 0$ und $X+Y \le 1$ nur Werte im Intervall $[0,2]$ annehmen. Für $u \in [0,2]$ erhält man:

$$\begin{aligned}P(U \le u) &= P(X+Y \le \frac{u}{2}) \\ &= \int\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y\le\frac{u}{2}\}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{\frac{u}{2}}\int_0^{\frac{u}{2}-x} 3(x+y)\,dx\,dy \\ &= 3\int_0^{\frac{u}{2}} (xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{\frac{u}{2}-x}\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{u}{2}} \frac{1}{8}u^2-\frac{x^2}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{8}u^3\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
2. Woche

11. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 48. *(Multinomialverteilung)*
Der Zufallsvektor $X = (X_1,X_2,\dots,X_r)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1,p_2,\dots,p_r)$, d.h.

$$P(X_1 = k_1,\dots,X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

für $k_1,\dots,k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \ldots + k_r = n$, wobei $p_1,\dots,p_r \geq 0$ und $p_1 + \ldots + p_r = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_i, $i = 1,2,\dots,r$.

(b) Bestimmen Sie für $i,j = 1,2,\dots,r$ die Kovarianzen $\mathrm{cov}(X_i,X_j)$ der Komponenten von X.

(c) Sind die Komponenten von X unabhängig?

Aufgabe 49. *(Faltung der geometrischen Verteilung)*
Gegeben seien zwei unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsgrößen X und Y. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Hausübung

Aufgabe 50. *(Das Postbotenproblem)*
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ von $(1,2,...,n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment. Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Hinweis. Es gilt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1,2,...,n$.

(6 Punkte)

Aufgabe 51. *(Faltung der Gammaverteilung)*
Wir schreiben $\Gamma(\alpha,\lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, für die in Aufgabe 38 vorgestellte Gammaverteilung mit den Parametern α und λ. Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta,\lambda)$.

(4 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 3.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
2. Woche

Lösungen zum

11. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 48. *(Multinomialverteilung)*
Der Zufallsvektor $X = (X_1,X_2,\ldots,X_r)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1,p_2,\ldots,p_r)$, d.h.

$$P(X_1 = k_1,\ldots,X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

für $k_1,\ldots,k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \ldots + k_r = n$, wobei $p_1,\ldots,p_r \geq 0$ und $p_1 + \ldots + p_r = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_i, $i = 1,2,\ldots,r$.

(b) Bestimmen Sie für $i,j = 1,2,\ldots,r$ die Kovarianzen $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ der Komponenten von X.

(c) Sind die Komponenten von X unabhängig?

Lösung. Es sei $X = (X_1,\ldots,X_r)$ multinomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1,p_2,\ldots,p_r)$.

(a) Es sei $\mathcal{I}_i := \{(k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_r) \in \mathbb{N}_0^{r-1} : k_1+\ldots+k_{i-1}+k_{i+1}+\ldots+k_r = n - k_i\}$. Dann ergibt sich für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned}
&P(X_i = k_i)\\
&= \sum_{\mathcal{I}_i} \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{i-1}! \cdot k_i! \cdot k_{i+1}! \cdot \ldots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_{i-1}^{k_{i-1}} \cdot p_i^{k_i} \cdot p_{i+1}^{k_{i+1}} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}\\
&= \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!} p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i}\\
&\quad \cdot \sum_{\mathcal{I}_i} \frac{(n-k_i)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{i-1}! \cdot k_{i+1}! \cdot \ldots \cdot k_r!} \frac{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_{i-1}^{k_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{k_{i+1}} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}}{(1-p_i)^{n-k_i}}\\
&= \frac{n!}{k_i!(n-k_i)!} p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i} \cdot 1\\
&= \binom{n}{k_i} p_i^{k_i}(1-p_i)^{n-k_i},
\end{aligned}$$

also ist $X_i \sim \operatorname{Bin}(n,p_i)$ für alle $i = 1,\ldots,r$.

(b) Ein Experiment wird n-mal unabhängig wiederholt, Ereignispartition $B_1,\dots,B_r$, B_i hat Wahrscheinlichkeit p_i, $\sum p_i = 1$. Sei $Y_k = (Y_1^k,\dots,Y_r^k)$ mit $Y_i^k = 1$ wenn im k-ten Experiment B_i eintritt, 0 sonst. Dann ist $X = \sum_{k=1}^n Y_k$. Damit folgt nun ziemlich schnell:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_i,X_j) &= \operatorname{cov}\Big(\sum_{k=1}^n Y_i^k, \sum_{l=1}^n Y_j^l\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \operatorname{cov}(Y_i^k,Y_j^l) \\
&= \sum_{k=1}^n \operatorname{cov}(Y_i^k,Y_j^k), \text{ Unabh. der Experimente,} \\
&= \sum_{k=1}^n \big(EY_i^kY_j^k - EY_i^kEY_j^k\big) \\
&= n\cdot\big(P(B_i\cap B_j) - P(B_i)P(B_j)\big) \\
&= n\cdot(\delta_{ij}p_j - p_ip_j),
\end{aligned}$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet.

(c) Die Komponenten sind natürlich nicht unabhängig, sie sind ja noch nicht einmal unkorreliert.

Aufgabe 49. *(Faltung der geometrischen Verteilung)*
Gegeben seien zwei unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsgrößen X und Y. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

Lösung. X,Y sind geometrisch verteilt mit Parameter p, d.h.

$$P(X=k) = P(Y=k) = (1-p)^{k-1}p \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{N}.$$

Für $k\geq 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von $X+Y$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{n=1}^{k-1} P(X=n,Y=k-n) \;=\; \sum_{n=1}^{k-1} P(X=n)P(Y=k-n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1}(1-p)^{n-1}p(1-p)^{k-n-1}p \\
&= \sum_{n=1}^{k-1}(1-p)^{k-2}p^2 \\
&= (k-1)(1-p)^{k-2}p^2 \;=\; \binom{k-1}{1}(1-p)^{k-2}p^2,
\end{aligned}$$

d.h. $X+Y$ ist Negativ-Binomialverteilt mit den Parametern 2 und p, $X+Y\sim \mathrm{Nb}(2,p)$.

Hausübung

Aufgabe 50. *(Das Postbotenproblem)*
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ von $(1,2,...,n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment. Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Hinweis. Es gilt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1,2,...,n$.

(6 Punkte)

Lösung. Wir definieren Zufallsvariablen X_i, $i = 1,...,n$, durch

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $Y = X_1 + ... + X_n$ und es gilt

$$EX_i = P\big(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i\}\big) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\,,$$

$$\text{Var } X_i = \mathrm{E}X_i^2 - \big(\mathrm{E}X_i\big)^2 = \mathrm{E}X_i - \big(\mathrm{E}X_i\big)^2 = \frac{(n-1)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2 = \frac{n-1}{n^2},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) &= \mathrm{E}X_iX_j - \mathrm{E}X_i\mathrm{E}X_j \\ &= P(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i, \, \omega_j = j\}) - \mathrm{E}X_i\mathrm{E}X_j \\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathrm{E}Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1,$$

sowie mit der Gleichung von Bienaymé

$$\begin{aligned} \text{Var } Y &= \sum_{i=1}^{n} \text{Var } X_i + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) \\ &= n \cdot \frac{n-1}{n^2} + (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 51. *(Faltung der Gammaverteilung)*
Wir schreiben $\Gamma(\alpha,\lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, für die in Aufgabe 38 vorgestellte Gammaverteilung mit den Parametern α und λ. Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta,\lambda)$.

(4 Punkte)

Lösung. Der Satz zur Faltung aus der Vorlesung besagt: Für alle $z > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, (z-x)^{\beta-1}\lambda^{\beta} \cdot e^{-\lambda z}\, dx \\ &= e^{-\lambda z}\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, \lambda^{\alpha+\beta} \int_0^z x^{\alpha-1} \cdot (z-x)^{\beta-1}\, dx \\ &= e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 y^{\alpha-1} \cdot (1-y)^{\beta-1}\, dy, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $y = x \cdot z^{-1}$ verwendet wurde.

Der letzte Faktor hängt nun aber gar nicht mehr von z ab. Also ist die Dichte f_{X+Y} von $X + Y$ ein konstantes Vielfaches von

$$e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1}, \;\; z > 0,$$

der Dichte zur Verteilung $\Gamma(\alpha + \beta,\lambda)$. Da Wahrscheinlichkeitsdichten das Integral 1 haben, sind Dichten, die Vielfache voneinander sind, gleich. Also hat $X + Y$ die oben angegebene Dichte und ist somit $\Gamma(\alpha + \beta,\lambda)$-verteilt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
3. Woche

12. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 52. (Box-Muller-Verfahren)
Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien unabhängig und unif(0,1)-verteilt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$X_1 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2) \quad \text{und}$$
$$X_2 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

(b) Welche Verteilungen haben X_1 und X_2?

(c) Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 53. (w'erzeugende Funktion zur negativen Binomialverteilung)
X sei negativ binomialverteilt mit den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X. Was können Sie daraus für die Faltung unabhängiger, geometrisch verteilter Zufallsvariablen folgern?

Hausübung

Anmerkung: Dies ist das letzte Aufgabenblatt, das abgegeben werden kann und das bei der Bonusregelung eingeht. Die Summe der relevanten Hausübungspunkte beträgt 124.

Aufgabe 54. Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$\begin{aligned} V &:= X + Y \quad \text{und} \\ W &:= \frac{X}{X+Y}. \end{aligned}$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, dass V und W unabhängig sind.

(3/2/1 Punkte)

Aufgabe 55. (w'erzeugende Funktion zur Binomialverteilung)
X sei binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0{,}1)$.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Es seien X_1 und X_2 unabhängig und jeweils $\mathrm{Bin}(n{,}p)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.

(2/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungen in Woche 4.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
3. Woche

Lösungen zum

12. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Aufgabe 52. (Box-Muller-Verfahren)
Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien unabhängig und unif(0,1)-verteilt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$X_1 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2) \quad \text{und}$$
$$X_2 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

(b) Welche Verteilungen haben X_1 und X_2?

(c) Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 unabhängig sind.

Lösung. (a) Es ist

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2) \\ \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die gemeinsame Dichte von X_1,X_2:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = |\det(\Psi^{-1})'(x_1,x_2)| \cdot f_{(U_1,U_2)}\big(\Psi^{-1}(x_1,x_2)\big).$$

Es ist $x_2/x_1 = \tan(2\pi u_2)$, also $u_2 = (1/2\pi)\arctan(x_2/x_1)$, sowie $x_1^2+x_2^2 = -2\log(u_1)$, also $u_1 = e^{-(1/2)(x_1^2+x_2^2)}$. Damit lautet die Umkehrfunktion zu Ψ

$$(\Psi^{-1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(1/2)(x_1^2+x_2^2)} \\ (1/2\pi)\arctan(x_2/x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Als Ableitungsmatrix erhält man

$$(\Psi^{-1})'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1u_1 & -x_2u_1 \\ -(1/2\pi)\big(x_2/(x_1^2+x_2^2)\big) & (1/2\pi)\big(x_1/(x_1^2+x_2^2)\big) \end{pmatrix}$$

und als Betrag der Determinante hiervon

$$|\det(\Psi^{-1})'(x_1,x_2)| = \frac{1}{2\pi}\exp\big(-(1/2)(x_1^2+x_2^2)\big).$$

Also ist die gemeinsame Dichte von X_1, X_2 gegeben durch

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\big(-(1/2)(x_1^2+x_2^2)\big) \cdot f_{(U_1,U_2)}\big(\Psi^{-1}(x_1,x_2)\big).$$

Wegen $\Psi^{-1}(x_1,x_2) \in (0,1)^2$ für alle $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $f_{(U_1,U_2)}(u_1,u_2) = \mathbb{1}_{(0,1)^2}(u_1,u_2)$ folgt schließlich

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\big(- (1/2)(x_1^2 + x_2^2)\big).$$

Als Randdichten erhält man

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\big(- (1/2)(x_1^2 + x_2^2)\big)\, dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(- (1/2)x_1^2\big),$$

und entsprechend

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(- (1/2)x_2^2\big).$$

(b) X_1 und X_2 sind offenbar standardnormalverteilt.

(c) Die gemeinsame Dichte ist das Produkt der Randdichten, also sind X_1 und X_2 unabhängig.

Aufgabe 53. (w'erzeugende Funktion zur negativen Binomialverteilung)
X sei negativ binomialverteilt mit den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X. Was können Sie daraus für die Faltung unabhängiger, geometrisch verteilter Zufallsvariablen folgern?

Lösung. Es gelte zunächst $X \sim \mathrm{Nb}(1,p)$, d.h. $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geq 1$. Dann gilt:

$$g_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \cdot z^k \; = \; pz \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \big((1-p)z\big)^{k-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

für $|z| \leq 1$.

Sei nun $X \sim \mathrm{Nb}(2,p)$, d.h. $P(X = k) = \binom{k-1}{1}(1-p)^{k-2}p^2$, $k \geq 2$. Dann gilt:

$$E(z^X) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(1-p)^{k-2}p^2 \cdot z^k = (pz)^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \big((1-p)z\big)^{k-2}.$$

Nun ist $\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$ die Ableitung von $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = (1-x)^{-1}$. Also ergibt sich

$$g_X(z) = E(z^X) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^2$$

für $|z| \leq 1$.

Langsam kann man ein Prinzip erkennen. Sei nun also $r \in \mathbb{N}$ beliebig und $X \sim \mathrm{Nb}(r,p)$, d.h. $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$, $k \geq r$. Es ergibt sich:

$$E(z^X) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r \cdot z^k = \frac{(pz)^r}{(r-1)!} \cdot \sum_{k=r}^{\infty} (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-r+1) \cdot \big((1-p)z\big)^{k-r}.$$

Hier ist $\sum_{k=r}^{\infty}(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-r+1)\cdot x^{k-r}$ die $(r-1)$-te Ableitung von $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1} = (1-x)^{-1}$. Also ergibt sich

$$g_X(z) = E(z^X) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r$$

für $|z| \leq 1$.
Seien nun X und Y unabhängig, $X \sim \mathrm{Nb}(r,p)$, $Y \sim \mathrm{Nb}(s,p)$. Aufgrund der Unabhängigkeit gilt $E(z^X)\cdot E(z^Y) = E(z^{X+Y})$. Also:

$$g_{X+Y}(z) = E(z^{X+Y}) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^{r+s}$$

für $|z| \leq 1$. Dies bestätigt die bereits bekannten Ergebnisse

$$\mathrm{Nb}(r,p) * \mathrm{Nb}(s,p) = \mathrm{Nb}(r+s,p) \;\text{ bzw. }\; \mathrm{geom}(p) * \mathrm{geom}(p) = \mathrm{Nb}(2,p).$$

Hausübung

Anmerkung: Dies ist das letzte Aufgabenblatt, das abgegeben werden kann und das bei der Bonusregelung eingeht. Die Summe der relevanten Hausübungspunkte beträgt 124.

Aufgabe 54. Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$V := X + Y \;\text{ und}$$
$$W := \frac{X}{X+Y}.$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, dass V und W unabhängig sind.

(3/2/1 Punkte)

Lösung. Es seien X und Y unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, es gilt also $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2\cdot\exp\big(-\lambda(x+y)\big)$. Benutze den Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten, um zunächst die gemeinsame Dichte von V und W zu bestimmen:

$$\mathcal{U} := (0,\infty)^2, \quad \mathcal{V} := (0,\infty)\times(0,1)$$
$$\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \Psi(x,y) := \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) =: (v,w).$$

Dann ist Ψ bijektiv und es ist

$$\Psi^{-1}(v,w) = \big(v\cdot w, v\cdot(1-w)\big).$$

Weiter ergibt sich

$$\left(\Psi^{-1}\right)' = \begin{pmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{pmatrix}$$

und

$$\left|\det\left(\left(\Psi^{-1}\right)'(v,w)\right)\right| = v.$$

Nach dem Transformationssatz gilt dann für die gemeinsame Dichte von V und W:

$$\begin{aligned} f_{V,W}(v,w) &= \frac{1}{|\det\left(\Psi'(\Psi^{-1}(v,w))\right)|} \cdot f_{X,Y}\left(\Psi^{-1}(v,w)\right) \\ &= \left|\det\left(\left(\Psi^{-1}\right)'(v,w)\right)\right| \cdot f_{X,Y}\left(\Psi^{-1}(v,w)\right) \\ &= v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v}. \end{aligned}$$

Durch Ausintegrieren über die einzelnen Komponenten erhält man dann die Dichten von V und W:

$$f_V(v) = \int_0^1 f_{V,W}(v,w)dw = \int_0^1 v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dw = v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v},$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{V,W}(v,w)dv = \int_0^\infty v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dv = 1,$$

jeweils für $v \in (0,\infty)$ bzw. $w \in (0,1)$. Daraus folgt, dass V Gamma-verteilt mit Parametern 2 und λ und W gleichverteilt auf $(0,1)$ ist, und wegen $f_{V,W}(v,w) = f_V(v) \cdot f_W(w)$ sind V und W unabhängig.

Aufgabe 55. (w'erzeugende Funktion zur Binomialverteilung)
X sei binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Es seien X_1 und X_2 unabhängig und jeweils $\text{Bin}(n,p)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.

(2/2 Punkte)

Lösung. Es sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$, d.h. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,...,n$.
(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E(z^X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(pz + (1-p)\right)^n \;=\; \left(1 - p(z-1)\right)^n. \end{aligned}$$

(b) Seien $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und X_1 und X_2 unabhängig. Dann gilt für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen

$$E(z^{X_1+X_2}) = E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) = \big(1 - p(z-1)\big)^{2n}.$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion und Verteilung ist dann $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2n,p)$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz
Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
4. Woche

13. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Ankündigung: Die Klausur findet, wie bereits bekannt, am Samstag, 3.2.07, von 12-13.30 Uhr im Audimax statt. Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein eigenhändig beschriebenes A4-Blatt (durchaus zweiseitig, aber keine Kopie).

Aufgabe 56. (momenterzeugende Funktion zur Gleichverteilung)
Es sei $X \sim \mathrm{unif}(a,b)$.

(a) Wie lautet die momenterzeugende Funktion zu X?

(b) Bestimmen Sie nun den Erwartungswert und die Varianz von X auf zwei verschiedene Arten, einmal in der „gewohnten Weise“ (d.h. per Definition) und zum anderen, indem Sie diese Parameter aus der momenterzeugenden Funktion zu X ableiten.

Aufgabe 57. (Chebyshev-Ungleichung)

(a) Es sei X eine mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon)$ in Abhängigkeit von ε und vergleichen Sie das Ergebnis mit der durch die Chebyshev-Ungleichung gelieferten Oberschranke $\frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{var}(X)$ für $\varepsilon > 0$.

(b) Geben Sie eine Zufallsvariable Y an, so dass die Oberschranke in der Ungleichung von Chebyshev für ein ε angenommen wird.

Hinweis: Benutzen Sie $Y \sim \mathrm{unif}\{-1,1\}$.

Hausübung

Hinweis: Dieser Aufgabezettel kann nicht mehr abgegeben werden. Die Lösung wird wie gewohnt nächste Woche im Internet veröffentlicht.

Aufgabe 58. (momenterzeugende Funktion zur Gamma-Verteilung)

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu $\Gamma(\alpha,\lambda)$.

(b) Beweisen Sie damit, dass

$$\Gamma(\alpha,\lambda) \star \Gamma(\beta,\lambda) = \Gamma(\alpha + \beta,\lambda)$$

gilt.

Aufgabe 59. Ein fairer Würfel wir 20 Mal geworfen. Es bezeichne X die Summe der Augenzahlen. (Die einzelnen Würfe werden als stochastisch unabhängig angenommen.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 30)$, $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ und $P(X = 100)$. (Es bietet sich an, dies mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von X zu tun und MAPLE zuhilfe zu nehmen.)

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den Werten der Dichte einer Normalverteilung mit den unter (b) ermittelten Parametern an den Stellen $x = 30, 50, 70, 100$.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und die Dichte aus Teil (c) in einem Diagramm dar.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
4. Woche

Lösungen zum

13. Übungsblatt Stochastik A

Stundenübung

Ankündigung: Die Klausur findet, wie bereits bekannt, am Samstag, 3.2.07, von 12-13.30 Uhr im Audimax statt. Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein eigenhändig beschriebenes A4-Blatt (durchaus zweiseitig, aber keine Kopie).

Aufgabe 56. (momenterzeugende Funktion zur Gleichverteilung)
Es sei $X \sim \mathrm{unif}(a,b)$.

(a) Wie lautet die momenterzeugende Funktion zu X?

(b) Bestimmen Sie nun den Erwartungswert und die Varianz von X auf zwei verschiedene Arten, einmal in der „gewohnten Weise“ (d.h. per Definition) und zum anderen, indem Sie diese Parameter aus der momenterzeugenden Funktion zu X ableiten.

Lösung. Sei $X \sim \mathrm{unif}(a,b)$.
(a) Es gilt

$$\varphi_X(t) = Ee^{tX} = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, e^{tx}\, dx = \frac{1}{t(b-a)}\, e^{tx}\Big|_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}.$$

(b) Herkömmliche Berechnung von Erwartungswert und Varianz:

$$EX = \int_a^b x\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\, \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{3(b-a)}\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{3(b-a)}\Big(\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^3+\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^3\Big) = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Alternative Berechnung über die momenterzeugende Funktion:

$\varphi_X(t)$ ist in der oben angegebenen Form nicht für $t=0$ definiert. Darum benutzen wir die Reihendarstellung von e:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{t(b-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(tb)^n}{n!}-\frac{(ta)^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)!(b-a)}t^n.$$

Damit

$$EX = \varphi'(0) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

sowie

$$EX^2 = \varphi''(0) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)},$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 57. (Chebyshev-Ungleichung)

(a) Es sei X eine mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon)$ in Abhängigkeit von ε und vergleichen Sie das Ergebnis mit der durch die Chebyshev-Ungleichung gelieferten Oberschranke $\frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{var}(X)$ für $\varepsilon > 0$.

(b) Geben Sie eine Zufallsvariable Y an, so dass die Oberschranke in der Ungleichung von Chebyshev für ein ε angenommen wird.

Hinweis: Benutzen Sie $Y \sim \operatorname{unif}\{-1{,}1\}$.

Lösung. (a) Für eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable gilt $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda}$ und $\operatorname{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, für $\lambda = 1$ also $\mathrm{E}X = \operatorname{var}(X) = 1$.

$$\begin{aligned} P(|X-1| \geq \varepsilon) &= 1 - P(|X-1| \leq \varepsilon) \\ &= 1 - P(-\varepsilon \leq X - 1 \leq \varepsilon) \\ &= 1 - (P(X \leq \varepsilon + 1) - P(X \leq -\varepsilon + 1)) \\ &= \begin{cases} \exp(-\varepsilon - 1) + 1 - \exp(-1 + \varepsilon), & 0 < \varepsilon < 1, \\ \exp(-\varepsilon - 1), & 1 \leq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ ist die Oberschranke aus der Chebyshev-Ungleichung immer größer als Eins, liefert also keine Einschränkung. Für $1 \leq \varepsilon$ sind die Werte in Abbildung 1 dargestellt. Auch in diesem Fall ist die Oberschranke also ziemlich schlecht.

(b) Es sei $Y \sim \operatorname{unif}\{-1{,}1\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} EY &= 0.5 \cdot (-1) + 0.5 \cdot 1 = 0 \\ \operatorname{var}(Y) &= EY^2 - EY = 1 \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 1$ gilt dann mit der Chebyshev-Ungleichung:

$$P(|Y - EY| \geq 1) = P(|Y| \geq 1) = 1 \leq \frac{1}{1^2} \cdot 1 = 1$$

Für die Zufallsvariable Y ist die Oberschranke also scharf.

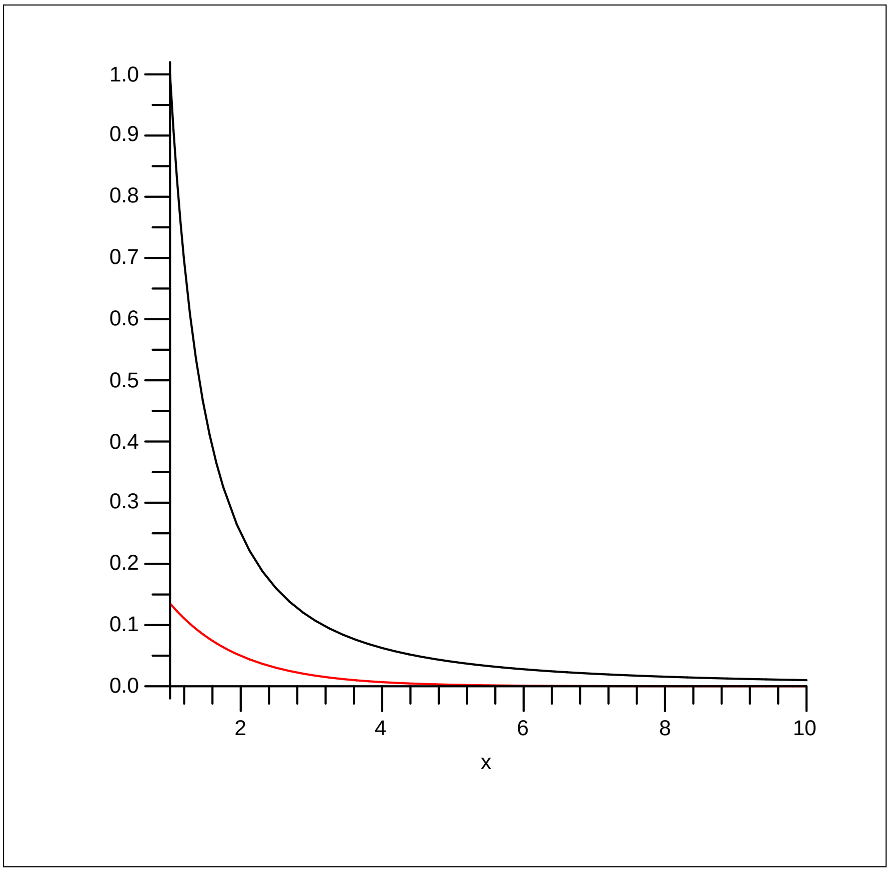


Abbildung 1: Vergleich von tatsächlicher Wahrscheinlichkeit (rot) und der Oberschranke durch Chebyshev-Ungleichung (schwarz)

Hausübung

Hinweis: Dieser Aufgabezettel kann nicht mehr abgegeben werden. Die Lösung wird wie gewohnt nächste Woche im Internet veröffentlicht.

Aufgabe 58. (momenterzeugende Funktion zur Gamma-Verteilung)

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu $\Gamma(\alpha,\lambda)$.

(b) Beweisen Sie damit, dass

$$\Gamma(\alpha,\lambda) \star \Gamma(\beta,\lambda) = \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$$

gilt.

Lösung. (a) Es sei $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$. Dann lautet die momenterzeugende Funktion $\varphi_X(t)$ für alle $t < \lambda$:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= Ee^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (\lambda-t)^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \cdot 1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

(b) Sind X und Y unabhängig, $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$, so gilt

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha+\beta}$$

für alle $t < \lambda$, also ist $X + Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$.

Aufgabe 59. Ein fairer Würfel wir 20 Mal geworfen. Es bezeichne X die Summe der Augenzahlen. (Die einzelnen Würfe werden als stochastisch unabhängig angenommen.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 30)$, $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ und $P(X = 100)$. (Es bietet sich an, dies mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von X zu tun und MAPLE zuhilfe zu nehmen.)

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den Werten der Dichte einer Normalverteilung mit den unter (b) ermittelten Parametern an den Stellen $x = 30, 50, 70, 100$.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und die Dichte aus Teil (c) in einem Diagramm dar.

Lösung. (a) Es bezeichne X_i, $i = 1,...,20$, das Wurfergebnis im i. Versuch. Da die einzelnen Würfe des Würfels als stochastisch unabhängig angenommen werden, ergibt sich die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $g_X(z)$ von X als 20. Potenz der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion für einen einzelnen Wurf des Würfels, d.h. es ist

$$g_X(z) = \left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6\right)^{20}.$$

Multipliziert man dies aus, so erhält man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von z:

$$P(X = 30) = 0.5429991705 \cdot 10^{-8},\ P(X = 50) = 0.1652011820 \cdot 10^{-2},$$
$$P(X = 70) = 0.5181859020 \cdot 10^{-1},\ P(X = 100) = 0.1448751637 \cdot 10^{-4}.$$

MAPLE-Worksheet

```
[> Digits:=20:
[> g := x -> (1/6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6);
[> g20 := expand(g(x)^20):
[> c := i -> evalf(coeff(g20,x,i)):
[> c(30); c(50); c(70); c(100);
```

(b) Für einen einzelnen Wurf des Würfels ergibt sich $E(X_i) = 7/2$ und $\mathrm{var}(X_i) = 35/12$, und damit

$$E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20 \cdot \frac{7}{2} = 70$$

wegen der Linearität des Erwartungswerts, sowie

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{i=1}^{20} \mathrm{var}(X_i) = 20 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{3}$$

wegen der Gleichung von Bienamyé und der Unabhängigkeit der X_i.

MAPLE-Worksheet

```
[> ewert := sum(k/6,k=1..6);
[> mom2 := sum(k^2/6,k=1..6):
[> var := mom2 - ewert^2;
[> EWert := 20*ewert;
[> Var := 20*var;
```

(c) Wie in der Aufgabe gefordert, betrachten wir die Dichte

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 70$ und $\sigma^2 = \frac{175}{3}$. Es ergibt sich

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(30) = 0.5779803317 \cdot 10^{-7},\ \varphi_{\mu,\sigma^2}(50) = 0.1694111602 \cdot 10^{-2},$$
$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(70) = 0.5223380565 \cdot 10^{-1},\ \varphi_{\mu,\sigma^2}(100) = 0.2331739079 \cdot 10^{-4}.$$

Die Werte stimmen also absolut näherungsweise mit den in Teil (a) berechneten Wahrscheinlichkeiten überein, was ja auch aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt. Qualitativ lässt sich noch festhalten, dass die Approximation an den Rändern schlechter ist als im zentralen Bereich, konkret ergeben sich als relative Fehler die Werte 964,4%, 2,5%, 0,8% und 60,9%. Das sieht zunächst einmal sehr schlecht aus, doch wie gesagt, absolut betrachtet liegen die Werte nahe bei einander, was auch die graphische Darstellung in Teil (d) beeindruckend vor Augen führt.

MAPLE-Worksheet

```
[> phi := x -> (2*Pi*Var)^(-1/2)*exp(-(x-EWert)^2/(2*Var)):
[> d := i -> evalf(phi(i)):
[> d(30); d(50); d(70); d(100);
```

(d) Darstellung unter MAPLE:

MAPLE-Worksheet

```
[> with(plots):
[> punkte := seq([i,c(i)],i=40..100):
[> plot1 := plot([punkte],style=point):
[> plot2 := plot(phi(x),x=40..100):
[> display([plot1,plot2]);
```

abb1

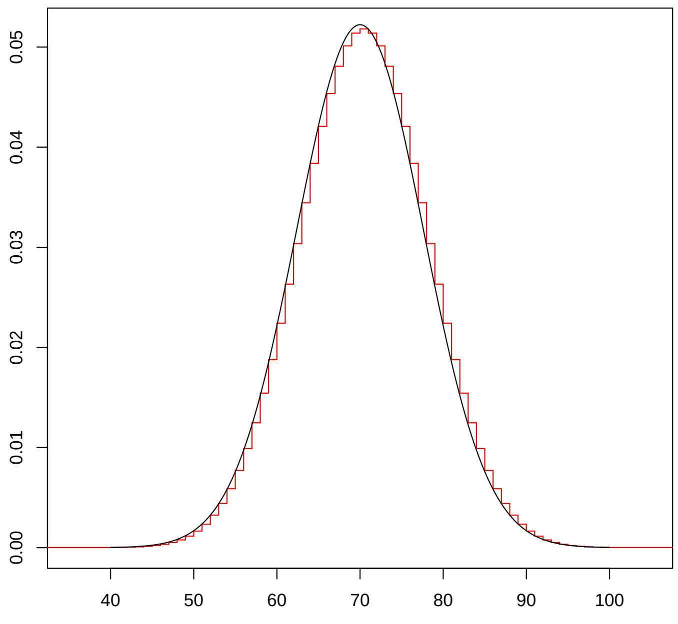


Abbildung 2: Vergleich von Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und Dichte der Normalverteilung

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
5. Woche

14. Übungsblatt Stochastik A

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt gibt an, wie eine Klausur über Inhalte der Stochastik A aussehen *könnte*. Die Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Aufgabe 60. Von den 20 Hörern einer Vorlesung haben drei im Juli Geburtstag. Eine Gruppe von fünf Studierenden wird zufällig aus diesem Hörerkreis ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei im Juli Geborenen in der ausgewählten Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 61. Es seien $A_1, \dots, A_n$ unabhängige Ereignisse mit $P(A_i) < 1$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass dann $P\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) < 1$ gilt. Bleibt diese Schlussfolgerung richtig, wenn man die Voraussetzung der Unabhängigkeit streicht?

Aufgabe 62. In einer großen Firma laufen 20% der Computer mit dem Betriebssystem LX und 80% mit dem Betriebssystem WN. Es ist bekannt, dass 90% der LX-Computer und 30% der WN-Computer virenfrei sind. Der Systemadministrator stellt bei einem zufällig ausgewählten System fest, dass es virenfrei ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird auf diesem Computer das Betriebssystem LX verwendet?

Aufgabe 63. Es sei $a \geq 1$. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und beide gleichverteilt auf dem Intervall $(0, a)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) hat die Summe der beiden Zufallsgrößen einen Wert größer als 1,

(b) ist X kleiner als $2 \cdot Y$?

Aufgabe 64. Die Lebensdauer X eines bestimmen elektronischen Bauteils (in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

(b) Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer, d.h. $\mathrm{E}X$.

(c) Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Lebensdauer des Bauteils mit 50%iger Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich a ist.

Aufgabe 65. (a) Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M_n zum Mittelwert $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ der Zufallsvariablen.

(c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion M zu M_n, die man mit $n \to \infty$ erhält, und geben Sie ein Beispiel für eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. H. Wegener

Leibniz Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
5. Woche

Lösungen zum

14. Übungsblatt Stochastik A

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt gibt an, wie eine Klausur über Inhalte der Stochastik A aussehen *könnte*. Die Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Aufgabe 60. Von den 20 Hörern einer Vorlesung haben drei im Juli Geburtstag. Eine Gruppe von fünf Studierenden wird zufällig aus diesem Hörerkreis ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei im Juli Geborenen in der ausgewählten Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Man kann diese Auswahl als Urnenmodell mit N Kugeln, M weißen und $N-M$ schwarzen, darstellen. Die weißen Kugeln entsprechen den im Juli Geborenen, die schwarzen den übrigen Hörern. Dann liegt eine hypergeometrische Verteilung mit Parametern $n = 5, N = 20$ und $M = 3$ vor. Gesucht ist die Wahscheinlichkeit für das Ereignis „Anzahl weiße Kugeln gleich 3“.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}} = 0.00877$$

Aufgabe 61. Es seien $A_1, \dots, A_n$ unabhängige Ereignisse mit $P(A_i) < 1$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass dann $P\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) < 1$ gilt. Bleibt diese Schlussfolgerung richtig, wenn man die Voraussetzung der Unabhängigkeit streicht?

Lösung.

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= 1 - P\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)^c\Big) \\ &= 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\Big) \\ &\overset{A_i \text{ unabh.}}{=} 1 - \underbrace{\Pi_{i=1}^n (1 - \underbrace{P(A_i)}_{<1})}_{>0} < 1 \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit ist notwendig. Betrachtet man z.B. $n = 2$ und $A_1, A_2 = A_1^c$, so gilt

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cup A_1^c) = 1$$

Aufgabe 62. In einer großen Firma laufen 20% der Computer mit dem Betriebssystem LX und 80% mit dem Betriebssystem WN. Es ist bekannt, dass 90% der LX-Computer und 30% der WN-Computer virenfrei sind. Der Systemadministrator stellt bei einem zufällig ausgewählten System fest, dass es virenfrei ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird auf diesem Computer das Betriebssystem LX verwendet?

Lösung. Es seien LX das Ereignis, dass das System LX eingesetzt wird, und WN, dass WN eingesetzt wird. Außerdem bezeichne S das Ereignis, dass kein Virus gefunden wurde. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich nun mit dem Satz von Bayes berechnen.

$$\begin{aligned} P(LX) = 0.2 \qquad & P(WN) = 0.8 \\ P(S|LX) = 0.9 \qquad & P(S|WN) = 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(LX|S) &= \frac{P(S|LX)\cdot P(LX)}{P(S|LX)\cdot P(LX) + P(S|WN)\cdot P(WN)} \\ &= \frac{0.9\cdot 0.2}{0.9\cdot 0.2 + 0.3\cdot 0.8} \\ &= \frac{0.18}{0.42} = 42.86\% \end{aligned}$$

Aufgabe 63. Es sei $a \geq 1$. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und beide gleichverteilt auf dem Intervall $(0, a)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) hat die Summe der beiden Zufallsgrößen einen Wert größer als 1,

(b) ist X kleiner als $2 \cdot Y$?

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} P(X+Y>1) &= 1 - P(X+Y \leq 1) \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{=f_X(x)\cdot f_Y(y)}\, dy\, dx \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{a^2}\, dy\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{a^2}\int_0^1 1 - x\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{a^2}(x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2a^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X < 2Y) &= \int_0^a \int_{\frac{x}{2}}^a \frac{1}{a}\frac{1}{a}\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^a a - \frac{x}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{a^2}[ax - \frac{x^2}{4}]\Big|_0^a = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 64. Die Lebensdauer X eines bestimmen elektronischen Bauteils (in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-3}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}, c \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

(b) Bestimmen Sie die mittlere Lebensdauer, d.h. EX.

(c) Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Lebensdauer des Bauteils mit 50%iger Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich a ist.

Lösung. (a) $1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{10}^{\infty} c \cdot x^{-3}\,dx = c \cdot \frac{1}{-2} x^{-2}\Big|_{10}^{\infty} = c \cdot \frac{1}{2 \cdot 100} \Rightarrow c = 200$

(b) $EX = \int_{10}^{\infty} x \cdot 200x^{-3}\,dx = 200 \int_{10}^{\infty} x^{-2}\,dx = 200 \frac{-1}{x}\Big|_{10}^{\infty} = 20$

(c) $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{10}^{a} 200x^{-3}\,dx = 200 \frac{-1}{2} x^{-2}\Big|_{10}^{a} = -100(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{100})$ $= 1 - \frac{100}{a^2} \overset{!}{=} 0.5 \Rightarrow a = \sqrt{200}$

Aufgabe 65. (a) Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X.

(b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M_n zum Mittelwert $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Zufallsvariablen.

(c) Bestimmen Sie die Grenzfunktion M zu M_n, die man mit $n \to \infty$ erhält, und geben Sie ein Beispiel für eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M.

Lösung. (a)

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{tX} &= \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{x(t-1)}\,dx \\ &= \frac{1}{t-1} e^{x(t-1)}\Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{-1}{t-1}, & t < 1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} M_n &= \mathrm{E}e^{t\bar{X}_n} = \mathrm{E}e^{t \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i} = \mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_1 + \ldots + \frac{t}{n} X_n} \\ &\overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \left(\mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\mathrm{E}e^{\frac{t}{n} X_n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{n}}\right)^n \text{ für } t < n \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{1-\frac{t}{n}}\big)^n \\
&= \frac{1}{\lim(1+\frac{-t}{n})^n} = e^t
\end{aligned}
$$

Um eine Zufallsgröße mit momenterzeugender Funktion M angeben zu können, erinnere man sich daran, dass laut Vorlesung für eine $N(\mu,\sigma)$-verteilte Zufallsvariable gilt:

$$\varphi(t) = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}.$$

Für $\mu = 1, \sigma = 0$ entspricht dies obigem Ausdruck. Eine Zufallsvariable, die $N(1,0)$ verteilt ist, nimmt mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert Eins an. Also wäre X mit $P(X=1) = 1, P(X=a) = 0\,\forall a \neq 1$ ein Beispiel.

Alternativ kann man die momenterzeugende Funktion zu einer δ_1-verteilten Zufallsvariable Y berechnen: $\mathrm{E}e^{tY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \underbrace{f_Y(y)}_{=\delta_1(y)}\, dy = e^t$. Auch dies führt auf obiges Ergebnis.