Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 7. Oktober 2004

Lösungen zu Aufgabenblatt 1 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 3. (Efrons Würfel)

(a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben Wahrscheinlichkeit 1/6), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9.
Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es bezeichne X das Ergebnis des blauen, Y das Ergebnis des roten und Z das des grünen Würfels. Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und berechnen Sie dann:

$$P(X < Y), \quad P(Y < Z) \text{ und } P(Z < X).$$

(b) Angenommen Sie und Ihr(e) Freund(in) studieren beide Mathematik und kennen daher die Lösung des Aufgabenteils (a). Ihr(e) Freund(in) bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er/sie sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide jeweils den von Ihnen gewählten Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

(c) Angenommen, Sie wollen mit zwei Ihrer Freunde ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

Bitte begründen Sie die Antworten zu (b) und (c) jeweils kurz. *(3/1/1 Punkte)*

Lösung.

(a) Als sinnvoller WRaum erweist sich (Ω, P) mit

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),\\ &(6,3,1),(6,3,5),(6,3,9),(6,4,1),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,1),(6,8,5),(6,8,9),\\ &(7,3,1),(7,3,5),(7,3,9),(7,4,1),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\},\end{aligned}$$

und

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \text{ mit } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \ \forall A \subset \Omega, \ \text{“Laplace-Experiment”}.$$

Es gilt:

$$\#\Omega = 3^3 = 27$$

und

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),\\
&\qquad (2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),(6,8,1),\\
&\qquad (6,8,5),(6,8,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\}\\
&= 15,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) < Z(\omega)\} &= \#\{(2,3,5),(2,3,9),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,9),\\
&\qquad (6,3,5),(6,3,9),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,9),\\
&\qquad (7,3,5),(7,3,9),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,9)\}\\
&= 15,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) < X(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,4,1),(2,8,1),(6,3,1),(6,3,5),\\
&\qquad (6,4,1),(6,4,5),(6,8,1),(6,8,5),(7,3,1),\\
&\qquad (7,3,5),(7,4,1),(7,4,5),(7,8,1),(7,8,5)\}\\
&= 15.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$P(X < Y) = P(Y < Z) = P(Z < X) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

(b) Wähle ich den blauen Würfel, so wählt mein Freund den roten Würfel und gewinnt mit W. 5/9. Wähle ich aber den roten Würfel, so wählt er den grünen Würfel und gewinnt ebenfalls mit W. 5/9. Wähle ich schließlich den grünen Würfel, so wählt mein Freund den blauen Würfel und gewinnt wiederum mit W. 5/9. Egal welchen Würfel ich wähle, ich wäre bei diesem Spiel immer im Nachteil und würde mich nicht darauf einlassen, es sei denn, ich bin unbedingt darauf aus zu verlieren.
(Bemerkung: Eigentlich ist der oben gewählte WRaum zur Beschreibung dieses Experiments gar nicht geeignet, schließlich werden hier ja nur zwei Würfel geworfen. Unser “gesunde Menschenverstand” sagt uns jedoch, dass wir genausogut auch noch den dritten Würfel mitwerfen können und dann in dem obigen WRaum

arbeiten, ohne uns jedoch weiter um das Ergebnis des dritten Würfels zu kümmern. Später werden wir diesen Sachverhalt durch den Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* mathematisch präzisieren.)

(c) Egal welchen Würfel man wählt, man hat immer gegenüber einem der beiden anderen Würfel eine Gewinnw. von 5/9 und gegenüber dem anderen eine Gewinnw. von 4/9. Deshalb könnte man zunächst auf die Idee kommen, dass es egal ist, welchen Würfel man wählt. Zählt man aber genau nach, so merkt man, dass der blaue und der rote Würfel bei jeweils 8 Versuchsausgängen gewinnen, der grüne jedoch bei 11. Also sollte man den grünen Würfel wählen.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 2P(A^c \cap (B \cup C)), \quad P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 2/3, \quad P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$$

(2 Punkte)

Lösung. Es ist

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap (B \cup C)) = \frac{3}{2}P(A)$$

und

$$P(A) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

wobei aus $P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$ folgt

$$P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

also $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B^c \cap C^c)$ und somit

$$P(A) = 2P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) \geq 2P(A \cap B \cap C)$$

Es folgt mit $P(A \cap B \cap C) = 1 - P((A \cap B \cap C)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c \cup C^c) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B \cup C) \geq 3P(A \cap B \cap C) = 1 \quad \text{und daher} \quad P(A \cup B \cup C) = 1.$$

Aufgabe 5. Es seien $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse. Beweisen Sie die Boolesche Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

(2 Punkte)

Lösung. Beweis durch vollständige Induktion.
IA: Für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} A_2 &= (A_2 \cap A_1) + (A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \\ (A_1 \cup A_2) &= A_1 + (A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) \end{aligned}$$

und damit

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

(Wurde auch schon in der Vorlesung gezeigt.)
IS: Es gilt

$$\begin{aligned} P\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) &= P\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big) \\ &\leq P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IA}, \\ &\leq P(A_1) + \ldots + P(A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IV}. \end{aligned}$$

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 14. Oktober 2004

Lösungen zu Aufgabenblatt 2 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 9. Im Stadtrat einer Großstadt sind vier Parteien A, B, C und D vertreten. Ein 15-köpfiger Stadtratsausschuss soll neu besetzt werden. Folgende Übersicht gibt an, wie viele Sitze jede der Parteien besetzen kann und wie viele dafür geeignete Fachleute sie hat:

Partei	A	B	C	D
Anzahl der Sitze	3	4	6	2
Anzahl der Fachleute	5	6	8	3

(a) Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die beiden Experten Huber und Meier der Partei C, die stets zusammenarbeiten, dem Ausschuss nur gemeinsam oder gar nicht angehören wollen?

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Um den Ausschuss zu besetzen, muss man aus der Menge der 5 Fachleute der Partei A 3 Fachleute auswählen, dann aus den 6 Fachleuten der Partei B 4 Fachleute, usw. Es ergeben sich

$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{8}{6}\binom{3}{2} = 10 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 3 = 12600$$

mögliche Besetzungen.

(b) Man kann zwei (disjunkte) Fälle unterscheiden: Huber und Meier gehören beide dem Ausschuss an, oder Huber und Meier gehören beiden nicht dem Ausschuss an.
Besetzungen mit Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{4}$.
Besetzungen ohne Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{6}$.
Daraus ergeben sich insgesamt

$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\left[\binom{6}{4} + \binom{6}{6}\right] = 10 \cdot 15 \cdot 3 \cdot (15+1) = 7200$$

mögliche Besetzungen.

Aufgabe 10.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Nullen und n Einsen ($m < n$) so nebeneinanderzuschreiben, dass keine zwei Nullen nebeneinanderstehen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-fachen Wurf einer fairen Münze exakt m-mal 'Kopf' kommt?

(c) * Wiederum werde eine faire Münze n-fach geworfen. Wie groß ist (im Falle $m > n/2$) die Wahrscheinlichkeit, dass m-mal 'Kopf' geworfen wird und in der gesamten Wurffolge niemals zweimal hintereinander 'Zahl' erscheint?

(3/2/4 Punkte)

Lösung.

(a) Man denke sich die n Einsen in einer Reihe nebeneinandergeschrieben. Zwischen den Einsen gibt es zusammen mit der ersten und der letzten Position $n+1$ Zwischenräume. Die m Nullen sollen nun so auf die Zwischenräume verteilt werden, dass in jeden Zwischenraum höchstens eine Null kommt, oder mit anderen Worten: wir wählen aus den $n+1$ Zwischenräumen m aus und schreiben in jeden genau eine Null. Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Zwischenräume aus $n+1$ auszuwählen? Antwort:

$$\binom{n+1}{m},$$

und dies ist damit auch die gesuchte Anzahl der Anordnungen der Nullen und Eisen in der vorgeschriebenen Weise.

(b) Wir schreiben abkürzend "1" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Kopf erscheint und "0" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Zahl erscheint. Dann haben wir ein Laplace-Experiment über dem Ergebnisraum

$$\Omega := \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \dots n\}$$

der 0-1-Folgen der Länge n über $\{0,1\}$. Dabei soll beispielsweise $\omega_i = 1$ bedeuten, dass beim i-ten Wurf der Münze Kopf erscheint. Es ist $\#\Omega = 2^n$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: "Es erscheint exakt m Mal Kopf". Das bedeutet aber, dass wir als Ergebnis ein n-Tupel aus Ω erhalten, bei dem genau m Positionen 1 und $n-m$ Positionen 0 sind. Also Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Einsen auf n Positionen und anschließend $n-m$ Nullen aus die verbleibenden $n-m$ Positionen zu verteilen? Antwort:

$$\#A = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-m} = \binom{n}{m}$$

und damit

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

(c) * Ω sei wie in Aufgabenteil (b). Sei B das hier betrachtete Ereignis. Dann bedeutet die Forderung, dass niemals zweimal hintereinander Zahl erscheint, dass genau die 0-1-Folgen aus Ω in B liegen, die m Einsen und $n-m$ Nullen enthalten und bei denen niemals zwei Nullen aufeinanderfolgen. Lt. Aufgabenteil (a) ist damit

$$\#B = \binom{m+1}{n-m},$$

und somit gilt

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{m+1}{n-m}}{2^n}.$$

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 22. Oktober 2004

Aufgabenblatt 3 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 14. In diesem Jahr soll in Niedersachsen die täglich stattfindende Keno-Lotterie gestartet werden. Dabei werden in einer Urne 70 durchnummerierte Kugeln gut durchmischt und anschließend 20 Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen entnommen. Die Mitspieler haben zuvor einen Tippschein mit 2 bis 10 verschiedenen Zahlen von 1 bis 70 angekreuzt, in der Hoffnung, dass diese gezogen werden.
Wir untersuchen die Fälle näher, dass 2 oder 10 Zahlen angekreuzt werden.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, bei 2 getippten Zahlen zu gewinnen, d.h. beide getippten Zahlen befinden sich unter den 20 gezogenen?

(b) Bei 10 getippten Zahlen gewinnt man, wenn 0,5,6,7,8,9 oder alle 10 Zahlen richtig sind. Berechnen Sie für jeden dieser Fälle die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(c) Wie hoch ist beim Tippen von 10 Zahlen die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis von Teil (a).

(2/4/1 Punkte)

Lösung. Diese Aufgabe kann dem interessierten Studenten als Beispiel zur später eingeführten hypergeometrischen Verteilung dienen.

(a) Es gibt $\binom{70}{2}$ (gleichwahrscheinliche) Möglichkeiten, 2 Zahlen auf dem Keno-Schein anzukreuzen. Stellen wir uns die 20 gezogenen Zahlen (unsichtbar) markiert vor, so gibt es $\binom{20}{2}$ Möglichkeiten, 2 der markierten Zahlen anzukreuzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man 2 der gezogenen Zahlen angekreuzt hat, ist also

$$\frac{\binom{20}{2}}{\binom{70}{2}} \approx 0.0787.$$

(b) Es gibt $\binom{70}{10}$ (gleichwahrscheinliche) Möglichkeiten, 10 Zahlen auf dem Keno-Schein anzukreuzen. Stellen wir uns die 20 gezogenen Zahlen (unsichtbar) markiert vor, so gibt es $\binom{20}{k}\binom{50}{10-k}$ Möglichkeiten, genau k der markierten Zahlen anzukreuzen (wähle k aus den 20 aus, die verbleibenden $10-k$ aus den 50 nicht markierten). Die Wahrscheinlichkeit, dass k der der angekreuzten Zahlen gezogen werden (und $10-k$ nicht), ist also

$$\frac{\binom{20}{k}\binom{50}{10-k}}{\binom{70}{10}}.$$

Als nummerische Werte ergeben sich

k	Gewinnwahrscheinlichkeit
0	$2.58 \cdot 10^{-2}$
5	$8.28 \cdot 10^{-2}$
6	$2.25 \cdot 10^{-2}$
7	$3.83 \cdot 10^{-3}$
8	$3.89 \cdot 10^{-4}$
9	$2.12 \cdot 10^{-5}$
10	$4.66 \cdot 10^{-7}$

(c) Die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit beim Tippen von 10 Zahlen ist 0.135, beim Tippen von 2 Zahlen nur 0.0787. (Auf dieser Basis kann man keine Aussagen treffen, ob man besser 2 oder besser 10 Zahlen ankreuzt. Um dies festzustellen, ist wichtig, welche Gewinnsummen ausgeschüttet werden. Dazu in einer späteren Aufgabe mehr)

Aufgabe 15.

(a) Eine Gruppe von n Banditen versteckt sich in den n Häusern einer Geisterstadt. Jeder Bandit wählt unabhängig von den anderen eines der Häuser als Versteck, wobei jedes Haus mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Dabei darf es vorkommen, dass mehrere Banditen dasselbe Haus als Versteck wählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in mindestens einem Haus kein Bandit verbirgt?

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (n-k)^n.$$

(2/4 Punkte)

Lösung.

(a) Es gibt n^n Möglichkeiten n Banditen auf n Häuser bei möglicher Mehrfachbesetzung zu verteilen. Bei wievielen dieser Möglichkeiten bleibt mindestens eines der Häuser frei? Schwer zu sagen. Einfach ist jedoch die Anzahl der Möglichkeiten für das Gegenereignis zu berechnen: Die Anzahl der Möglichkeiten, die n Banditen so zu verteilen, dass **kein** Haus frei bleibt, beträgt $n!$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$1 - \frac{n!}{n^n}.$$

(b) Zu zeigen ist

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (n-k)^n.$$

Da Aufgabenteil (a) verwendet werden soll, formen wir diese Gleichung zunächst einmal so um, dass auf der linken Seite die unter (a) berechnete Wahrscheinlichkeit steht und versuchen dann die rechte Seite entsprechend zu interpretieren:

$$\frac{n!}{n^n} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \\
1 - \frac{n!}{n^n} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

Links steht jetzt also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, das beim Verteilen von n unterscheidbaren Objekten auf n Plätze bei möglicher Mehrfachbesetzung mindestens ein Platz frei bleibt. Und auf der rechten Seite? Das ist nichts anderes als die Darstellung dieses Ereignisses mit Hilfe der Siebformel! Der Summationsindex k gibt die Anzahl der Plätze an , die jeweils (auf jeden Fall) frei bleiben, der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, jeweils diese k Plätze auszuwählen, die frei bleiben sollen, und $\left(\frac{n-k}{n}\right)^n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Objekte auf die übrigen $n-k$ Plätze verteilt werden.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 28. Oktober 2004

Aufgabenblatt 4 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 19.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A und B seien zwei unabhängige Ereignisse. Sind dann auch A^c und B^c unabhängig?

(b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau eines dieser Ereignisse ein?

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Da A und B unabhängig sind, dürfen wir $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ voraussetzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P(A^c) \cdot P(B^c) &= \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) \;=\; 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \;=\; \big(1 - P(A)\big) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big) \\ &= P(A^c) - P(B \cap A^c) \;=\; P(A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Also sind auch A^c und B^c unabhängig. Ebenso zeigt man im Übrigen die Unabhängigkeit von A und B^c, sowie von A^c und B.

(b) Mit A und B sind nach Aufgabenteil (a) auch A^c und B^c, A und B^c sowie A^c und B stochastisch unabhängig. Folglich gilt:

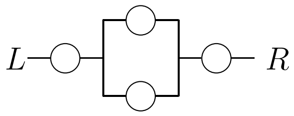
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

und

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c + A^c \cap B) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. (Netzwerke)

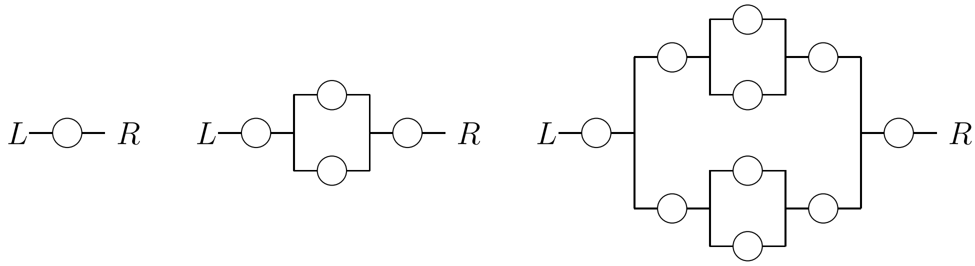
(a) Ein Netzwerk besteht aus 4 wie im nachfolgenden Diagramm angeordneten Schaltern, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p geschlossen sind.



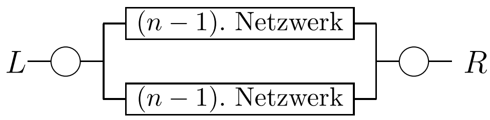
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom von L nach R fließen?

(b) Sie können obiges Netzwerk als zweites Glied einer ganzen Folge von Netzwerken auffassen.

1. Netzwerk: **2. Netzwerk:** **3. Netzwerk:**



n. Netzwerk:



Sei $P_n(p)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im n. Netzwerk der Strom von L nach R fließen kann. Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel:

$$P_{n+1}(p) = p^2 \cdot \Big(2P_n(p) - P_n^2(p)\Big),\ n \in \mathbb{N},\ P_1(p) = p.$$

(c) Zeichnen Sie einmal das 4. Netzwerk. "Zu Fuß" würden Sie $P_4(p)$ wohl nur sehr schwer herausbekommen, aber mit der obigen Rekursionsformel ist das nicht weiter schwer. Welchen Wert hat $P_4(p)$? (Der Einsatz von Maple erleichtert die Berechnung ungemein.)

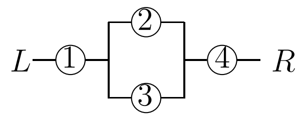
(d) * Versuchen Sie durch Computerexperimente (Maple, etc.) (oder ersatzweise durch scharfes Nachdenken) herauszubekommen, wie sich die Funktion $P_n(p)$ mit $n \to \infty$ verhält.

(e) * Können Sie dieses Verhalten begründen? Warum spielt die Wahrscheinlichkeit $p = 1/\sqrt{2}$ eine so wichtige Rolle?

(2/2/2/2/3* Punkte)*

Lösung.

(a) Die Schalter seien wie folgt durchnummeriert:



Es bezeichne A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, das Ereignis, dass der Schalter Nr. i eingeschaltet ist und S das Ereignis, dass ein Strom von L nach R fließen kann. Damit das Ereignis S eintreten kann, müssen die Schalter Nr. 1 und 4 und zusätzlich mindestens einer der Schalter Nr. 2 und 3 geschlossen sein. Also gilt

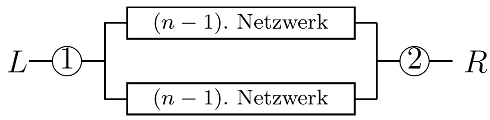
$$P(S) = P\Big(A_1 \cap A_4 \cap (A_2 \cup A_3)\Big)$$

und mit der Unabhängigkeit der Ereignisse A_1, A_2, A_3 und A_4 folgt

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A_1 \cap A_4 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_4 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= p^3 + p^3 - p^4 \\ &= 2 \cdot p^3 - p^4. \end{aligned}$$

(b) Für das n. Netzwerk führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

n. Netzwerk:



Es bezeichne wieder A_1 bzw. A_2 das Ereignis, dass der Schalter Nr. 1 bzw. Nr. 2 geschlossen ist, S_n, dass ein Strom im n. Netzwerk von L nach R fließen kann und zusätzlich O_{n-1} bzw. U_{n-1} das Ereignis, dass das obere bzw. untere $(n-1)$. Netzwerk den Strom leitet. Mit den gleichen Überlegungen wie zuvor gilt jetzt:

$$\begin{aligned} P(S) &= P\Big(A_1 \cap A_2 \cap (O_{n-1} \cup U_{n-1})\Big) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap O_{n-1}) + P(A_1 \cap A_2 \cap U_{n-1}) - P(A_1 \cap A_2 \cap O_{n-1} \cap U_{n-1}). \end{aligned}$$

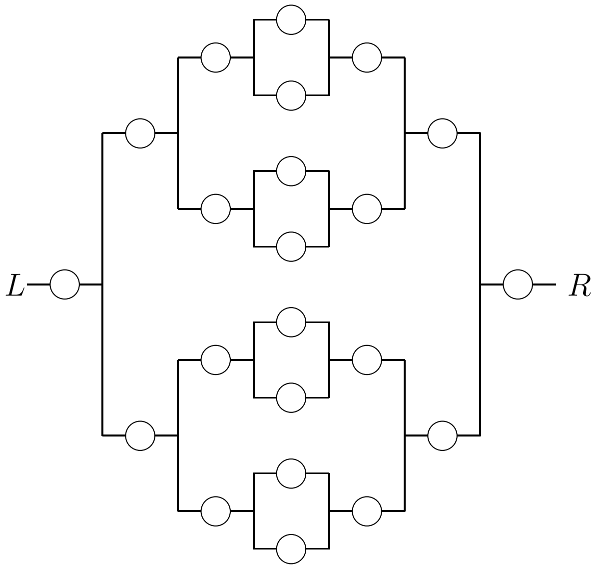
Nun sind die Ereignisse A_1, A_2, O_{n-1} und U_{n-1} offensichtlich unabhängig und es folgt:

$$P(S_n) = p^2 \cdot P(O_{n-1}) + p^2 \cdot P(U_{n-1}) - p^2 \cdot P(O_{n-1}) \cdot P(U_{n-1}).$$

Beachtet man jetzt noch, dass gilt $P(S_n) = P_n(p)$ und $P(O_{n-1}) = P(U_{n-1}) = P_{n-1}(p)$, so folgt die behauptet Rekursionsformel, wobei $P_1(p) = p$ klar sein dürfte.

(c) Das vierte Netzwerk sieht wie folgt aus:

4. Netzwerk:



Mit Hilfe der Rekursionsformel aus Aufgabenteil (b) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P_1(p) &= p \\
P_2(p) &= 2p^3 - p^4 \\
P_3(p) &= 4p^5 - 2p^6 - 4p^8 + 4p^9 - p^{10} \\
P_4(p) &= 8p^7 - 4p^8 - 8p^{10} + 8p^{11} - 18p^{12} + 16p^{13} \\
&\quad -4p^{14} + 32p^{15} - 48p^{16} + 24p^{17} - 20p^{18} \\
&\quad +32p^{19} - 24p^{20} + 8p^{21} - p^{22}
\end{aligned}$$

(d) Durch Computerexperimente ergibt sich folgende Entwicklung von $P_n(p)$ mit $n \to \infty$:

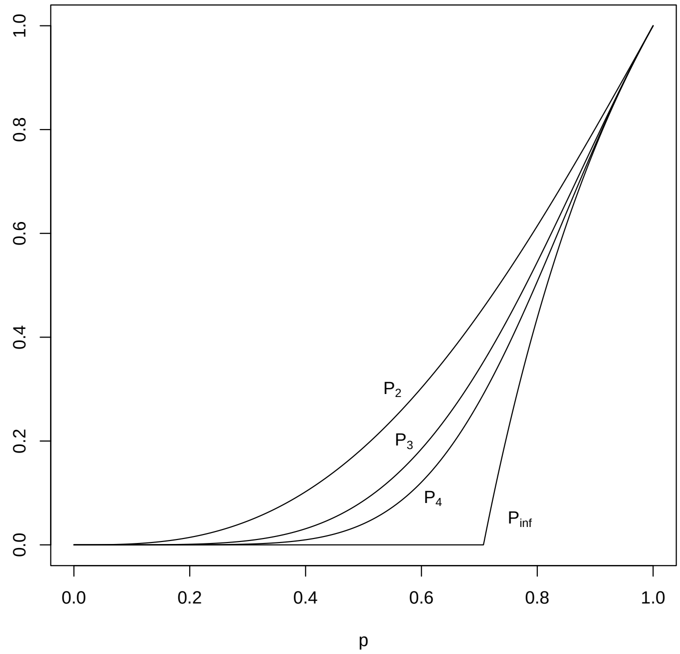


Abbildung 1: Die Entwicklung von P_n mit $n \to \infty$.

Durch scharfes Nachdenken erhält man als Grenzfunktion

$$P_\infty(p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } p \leq 1/\sqrt{2}, \\ 2 - \frac{1}{p^2} & \text{, falls } p > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(Begründung in Aufgabenteil (e).)

(e) Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ sind trivial. Wenn die Folge $(P_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ für festes $p \in (0, 1)$ überhaupt konvergiert, so gegen einen Fixpunkt der Funktion

$$F(x) := p^2 \Big(2 \cdot x - x^2 \Big).$$

Als Fixpunkte erweisen sich $x_1 = 0$ und $x_2 = 2 - 1/p^2$. Außerdem liegt die Folge $(P_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ immer im Intervall $[0, 1]$.

Für $p \leq 1/\sqrt{2}$ liegt der Fixpunkt x_2 außerhalb des Intervalls $[0, 1]$, so dass als möglicher Grenzwert nur der Fixpunkt $x_1 = 0$ in Frage kommt. Man kann sich überlegen, dass in diesem Fall der Fixpunkt x_1 tatsächlich ein anziehender Fixpunkt ist und es ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} P_n(p) = x_1 = 0.$$

Das folgende Bild zeigt beispielsweise den Fall $p = 0.65$:

Für $p > 1/\sqrt{2}$ liegt der Fixpunkt x_2 innerhalb des Intervalls $[0, 1]$, und es erweist sich, dass jetzt der Fixpunkt x_1 ein abstoßender, der Fixpunkt x_2 jedoch ein anziehender

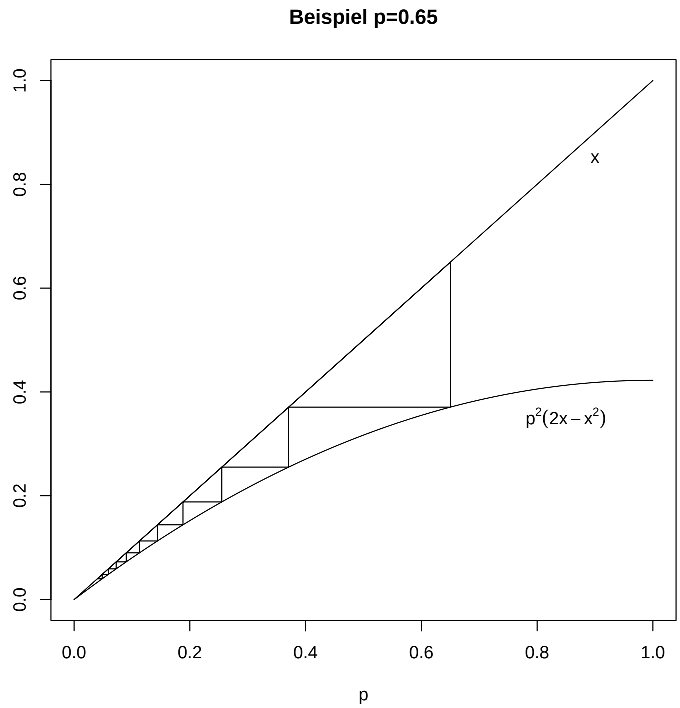


Abbildung 2: Im Fall $p \leq 1/\sqrt{2}$ erweist sich 0 als anziehender Fixpunkt

Fixpunkt ist, und es ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(p) = x_2 = 2 - \frac{1}{p^2}.$$

Abbildung 3 zeigt beispielsweise den Fall $p = 0.8$.

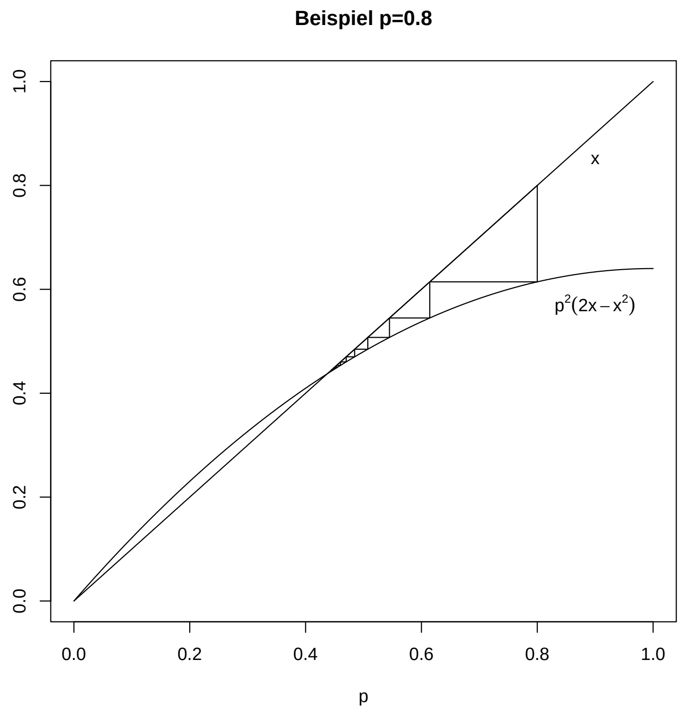


Abbildung 3: Im Fall $p > 1/\sqrt{2}$ ist $1/\sqrt{2}$ der anziehende Fixpunkt

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 4. November 2004

Aufgabenblatt 5 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 24.

(a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen; X bezeichne das Minimum der beiden erhaltenen Augenzahlen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X.

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen; X sei die Anzahl der erhaltenen Doppel-Sechsen. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt X die Werte 1, 3 und 6 an? Welche Werte liefert die Approximation durch eine Poisson-Verteilung im Sinne von Satz 4.4? Versuchen Sie eine Aussage über die Qualität der Approximation zu machen.

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Es bezeichne X_1 das Ergebnis des ersten Würfelwurfes und X_2 das Ergebnis des zweiten Würfelwurfes. Dann sind X_1 und X_2 unabhängig und jeweils gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und es gilt $X = \min\{X_1, X_2\} =: X_1 \vee X_2$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X. X kann die Werte $1, 2, 3, 4, 5, 6$

annehmen, und es gilt für $k \in \{1, ..., 6\}$:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(X_1 \vee X_2 = k) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\} \cup (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}) \\
&\qquad \cup (\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\})\big) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}\big) \\
&\quad + P\big(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\}\big), \text{ da diese Ereignisse disjunkt sind,} \\
&= P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 > k\}\big) \\
&\quad + P\big(\{X_2 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_1 > k\}\big), \\
&\quad \text{da diese Zufallsvariablen unabhängig sind,} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} \\
&= \frac{1 + 6 - k + 6 - k}{36} \\
&= \frac{13 - 2k}{36}.
\end{aligned}$$

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen. X bezeichne die Anzahl der erhalten Doppel-Sechsen. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 36$ und $p = 1/36$, kurz $X \sim \text{Bin}(36, 1/36)$. Dementsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert k annimmt für alle $k = 0, 1, ..., 36$ zu:

$$P(X = k) = \binom{36}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k}.$$

Insbesondere gilt:

$$P(X = 1) = \binom{36}{1} \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(\frac{35}{36}\right)^{35} \approx 0.3731,$$

$$P(X = 3) = \binom{36}{3} \left(\frac{1}{36}\right)^3 \left(\frac{35}{36}\right)^{33} \approx 0.0604,$$

$$P(X = 6) = \binom{36}{6} \left(\frac{1}{36}\right)^6 \left(\frac{35}{36}\right)^{30} \approx 0.0003843.$$

Das Gesetz der seltenen Ereignisse (Lemma 3.1) besagt nun, dass man bei "großem" n und "kleinem" p die Verteilung $\text{Bin}(n, p)$ durch die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ approximieren kann. In unserem Falle ist also $\lambda = n \cdot p = 36 \cdot (1/36) = 1$

zu wählen. Ist $\tilde{X}$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 1$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $P(\tilde{X} = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Dementsprechend ergeben sich hier folgende Approximationen:

$$P(\tilde{X} = 1) = e^{-1} \cdot \frac{1}{1!} \approx 0.3679,$$

$$P(\tilde{X} = 3) = e^{-1} \cdot \frac{1}{3!} \approx 0.0613,$$

$$P(\tilde{X} = 6) = e^{-1} \cdot \frac{1}{6!} \approx 0.0005109.$$

Man stellt fest, dass die Approximationen kleinerer Wahrscheinlichkeiten einen größeren relativen Fehler aufweisen; es gilt

$$\frac{|P(X=1) - P(\tilde{X}=1)|}{|P(X=1)|} \approx \frac{|0.3731 - 0.3679|}{|0.3731|} \approx 1.4\%,$$

$$\frac{|P(X=3) - P(\tilde{X}=3)|}{|P(X=3)|} \approx \frac{|0.0604 - 0.0613|}{|0.0.0604|} \approx 1.5\%,$$

$$\frac{|P(X=6) - P(\tilde{X}=6)|}{|P(X=6)|} \approx \frac{|0.0003843 - 0.0005109|}{|0.0003843|} \approx 32.9\%.$$

Die Approximation der Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung wird also bei Werten für k, die nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auftreten, zunehmend schlechter.

Aufgabe 25. (Banach's matchbox problem) Herr B. war ein passionierter Pfeifenraucher und hatte stets in seiner linken und in seiner rechten Tasche jeweils eine Streichholzschachtel, die beide anfänglich n Streichhölzer enthielten. Benötigte Herr B. ein Streichholz, so wählte er eine der beiden Taschen zufällig aus und entnahm der darin befindlichen Schachtel ein Streichholz. Irgendwann war dann natürlich die gewählte Schachtel leer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt die andere Schachtel in diesem Moment noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer?

(4 Punkte)

Erste Lösung. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch, dass B. vor dem $(2n-k+1)$. Versuch bereits n Mal in seine linke Tasche gegriffen hat und nun im $(2n-k+1)$. Versuch zum $(n+1)$. Mal in die linke Tasche greift. Es gibt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten, die n Versuche, in denen B. in seine linke Tasche greift, auf die ersten $2n-k$ Versuche zu verteilen. Jede dieser Möglichkeiten hat jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeit $(1/2)^{2n-k+1}$ und es ergibt sich:

$$p_1 = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Sei nun p_2 das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s rechter Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner linken Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind.

Aus Symmetriegründen gilt $p_1 = p_2$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2 \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} .$$

Zweite Lösung. Wir berechnen zunächst wieder die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als dass eine mit den Parametern $r = n + 1$ und $p = 1/2$ negativ binomialverteilte ZV (Anzahl der Versuche, bis zum $(n + 1)$. Mal in die linke Tasche gegriffen wird) den Wert $2n - k + 1$ annimmt. Dann gilt

$$p_1 = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} .$$

Mit den gleichen Symmetrieüberlegungen wie oben ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2 \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} .$$

(Anmerkung: Die negative Binomialverteilung wurde in Aufgabe 22 eingeführt.)

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 11. November 2004

Aufgabenblatt 6 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 28.

(a) Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X}.$$

(b) Sei X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n, d.h.

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \;\; k = 0, ..., \min\{M,n\}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Es gilt $Y + Z = 1$, also $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Y+Z) = \mathrm{E}(1) = 1$. Wir brauchen also nur einen der beiden Erwartungswerte explizit auszurechnen. Wir entscheiden uns für den von Y und erhalten:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot P(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right) \;=\; \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{E}(Z) = 1 - \mathrm{E}(Y)$ folgt dann

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \;=\; \frac{\lambda - 1 + e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{k \cdot M! \cdot (N-M)! \cdot n! \cdot (N-n)!}{k! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N!} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{M \cdot (M-1)! \cdot (N-M)! \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (N-n)!}{(k-1)! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N \cdot (N-1)!} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \frac{\binom{M-1}{k}\binom{N-M}{(n-1)-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot 1 = \frac{M \cdot n}{N}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 29. Ein fairer Würfel wird n mal nacheinander geworfen (Laplace-Modell (Ω, P) mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$). Die Zufallsvariable Y_n sei die größte der geworfenen Augenzahlen, also $Y_n(\omega_1, \dots, \omega_n) := \max_{1 \le j \le n} \omega_j$, $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}Y_n$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(Y_n) = 6.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0.$$

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Mit Aufgabe 27 folgt

$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{6} P(Y_n \ge k) = 6 - \sum_{k=1}^{6} P(Y_n < k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} P(Y_n \le k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n$$

und damit die Behauptung. Alternative kann man diese Aussage auch ohne direkte Berechnung des Erwartungswertes erhalten: Es ist $\mathrm{E}(Y_n) \le 6$ und $\mathrm{E}(Y_n) \ge 6P(Y_n = 6)$. Es gilt $P(Y_n = 6) = 1 - P(Y_n \le 5) = 1 - (5/6)^n$, womit die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{E}((Y_n - \mathrm{E}(Y_n))^2) = (6 - \mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = 6) + \sum_{j=1}^{5} (j - \mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = j).$$

Wegen $P(Y_n = 6) \to 1$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) gilt $P(Y_n = j) \to 0$ für $n \to \infty$ und $j = 1, \ldots, 5$. Zusammen mit $\mathrm{E}(Y_n) \to 6$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) folgt die Behauptung.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

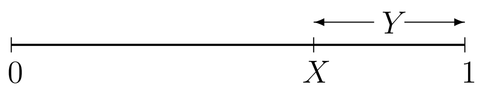
Hannover, 26. November 2004

Aufgabenblatt 7 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 33. (Zerbrechende Stäbe)
Ein Stab der Länge 1 möge an einer zufälligen Stelle zerbrechen. Genauer wollen wir annehmen, dass alle Bruchpositionen gleichwahrscheinlich sind, d.h. der Abstand X des Bruchpunktes vom linken Endpunkt des Stabes sei $U(0,1)$-verteilt.



Sei Y die Länge des kürzeren Bruchstückes (das natürlich nicht immer wie in der Skizze das rechte zu sein braucht). Dann ist Y wieder eine Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren, also $Y/(1-Y)$, kleiner oder gleich $1/4$?

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Es gilt $X \sim U(0,1)$ und $Y = \min\{X, 1-X\}$. Y kann offenbar nur Werte im Intervall $[0, 1/2]$ annehmen und es gilt

$$\begin{aligned}
P(Y \le y) &= 1 - P(Y > y) \\
&= 1 - P(\min\{X, 1-X\} > y) \\
&= 1 - P(X > y \text{ und } 1 - X > y) \\
&= 1 - P(X > y \text{ und } X < 1 - y) \\
&= 1 - P(y < X < 1 - y) \\
&= 1 - P(X \in [y, 1-y]), \text{ das Intervall } [y, 1-y] \text{ hat die Länge } 1 - 2y, \\
&= 1 - (1 - 2y) \\
&= 2y.
\end{aligned}$$

Es ist also $Y \sim U(0, 1/2)$.

(b) Das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren ist $Y/(1-Y)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Y}{1-Y} \leq \frac{1}{4}\right) &= P(4Y \leq 1-Y) \\ &= P(5Y \leq 1) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1}{5}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 34. (Quantiltransformation)

(a) Es sei F eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion, F^{-1} bezeichne die Umkehrfunktion zu F und U sei eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$.

(b) Nutzen Sie das Resultat aus Aufgabenteil (a), um aus einer unif$(0,1)$-verteilten Zufallsvariable U eine mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable zu konstruieren.

(2/2 Punkte)
Lösung.

(a) Für die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$ gilt:

$$P\big(F^{-1}(U) \leq y\big) = P\big(U \leq F(y)\big) = F(y).$$

$F^{-1}(U)$ hat also Verteilungsfunktion F.

(b) Mit diesem Resultat folgt, dass wir aus einer unif$(0,1)$-Zufallsvariablen U eine exp(λ)-Zufallsvariable durch $F^{-1}(U)$ erhalten, wenn F^{-1} die Umkehrfunktion zur Verteilungsfunktion F der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist. Es gilt:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

und damit

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x).$$

Mit U ist auch $1-U$ unif$(0,1)$-verteilt, man erhält also sowohl

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U), \quad \text{als auch} \quad -\frac{1}{\lambda}\log(U)$$

als mögliche Lösungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 3. Dezember 2004

Aufgabenblatt 8 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 38. (*Gamma-Verteilung*)
Die *Gamma-Verteilung* mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$) ist die Verteilung auf $(0, \infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ die *Gammafunktion.*

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(b) Bestimmen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(c) Zeigen Sie, daß sich die *Exponentialverteilung* als Spezialfall der *Gamma-Verteilung* ergibt.

(3/2/1 Punkte)

Lösung.

(a) Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Mit der Substuitution $y = \lambda x$ folgt:

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^\infty x \cdot f_{\alpha,\lambda}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha \lambda^\alpha e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\, \Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert für alle $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx \\ &= -x^\alpha e^{-x}\big|_0^\infty + \alpha \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \alpha \cdot \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt $EX = \alpha/\lambda$.

(b) Analog zu Teil (a) erhält man

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot f_{\alpha,\lambda}(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

(c) Beim Vergleich der Dichtefunktionen erweist sich die *Exponentialverteilung* mit Parameter λ als Spezialfall der *Gamma-Verteilung*, und zwar für den Parameter $\alpha = 1$.

Aufgabe 39. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Bestimmen Sie $E(|X|)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $E\big(e^{tX}\big)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

(2/2 Punkte)

Lösung. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Dann gilt

$$\begin{aligned} E|X| &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}dx = -\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}dx + \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}dx \\ &= 2 \cdot \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(-e^{-x^2/2}\big)\Big|_0^\infty \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(0-(-1)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

(b) Sei φ_{μ,σ^2} die Dichte zu $N(\mu,\sigma^2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E\big(e^{tX}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \varphi_{0,1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-t)^2/2} \cdot e^{t^2/2}dx = e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-t)^2/2}dx \\ &= e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{t,1}(x)dx = e^{t^2/2} < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 40. Es sei X eine absolut stetige, nicht-negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass gilt

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(t))\ dt.$$

*(*3 Punkte)*

Lösung. Es sei f die Dichte von X. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 - F(t))\ dt &= \int_0^\infty \int_t^\infty f(u)\ du\ dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty I(u \geq t) f(u)\ du\ dt \\
&= \int_0^\infty f(u) \int_0^u 1\ dt\ du \\
&= \int_0^\infty u f(u)\ du \ = \ EX.
\end{aligned}$$

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 30. Dezember 2004

Aufgabenblatt 9 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 43. Beim Kartenspiel “Bridge” werden von den 52 Karten eines üblichen Kartenspiels (bestehend aus jeweils As, 2, 3, ..., 10, Bube, Dame und König in den Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo) jeweils 13 an die vier Spieler Nord, Ost, Süd und West ausgeteilt. Es sei X die Anzahl der Asse von Spieler Nord, Y die Anzahl der Asse von Spieler Süd.

(a) Bestimmen Sie (tabellarisch) die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X und Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Spieler dieselbe Anzahl von Assen?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Spieler Nord und Süd zusammen alle vier Asse?

3/2/1 Punkte)

Lösung.

(a) Wir stellen uns die Karten von 1 bis 52 durchnumeriert vor, o.B.d.A. seien dabei die Karten von 1 bis 4 die Asse. Wir definieren den Ergebnisraum Ω durch

$$\Omega := \{(D_1, D_2, D_3, D_4) : D_i \subset \{1, ..., 52\},\ \#D_i = 13,\ D_i \cap D_j = \emptyset\ (i \neq j)\}.$$

O.B.d.A. sei D_1 die Menge der Karten von Spieler Nord und D_2 die Menge der Karten von Spieler Süd. Das Austeilen ist dann ein Laplace-Experiment auf Ω und es gilt

$$\#\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}.$$

X ist die Anzahl der Asse von Spieler Nord, Y die der Asse von Spieler Süd, es gilt also:

$$X(\omega) = \#\big(D_1(\omega) \cap \{1, 2, 3, 4\}\big)$$

und

$$Y(\omega) = \#\big(D_2(\omega) \cap \{1, 2, 3, 4\}\big)$$

Mit ähnlichen Überlegungen, wie wir sie schon einmal in Aufgabe 12 in Zusammenhang mit einem Skatspiel angestellt haben, folgt nun für alle $k, l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit $k + j \leq 4$:

$$P(X = k, Y = j) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{13-k}\binom{4-k}{j}\binom{35+k}{13-j}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}.$$

Tabellarisch ergeben sich die folgenden Werte (jeweils $\times 20825$):

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4
0	1150	2600	1950	572	55
1	2600	4225	2028	286	0
2	1950	2028	468	0	0
3	572	286	0	0	0
4	55	0	0	0	0

(Man beachtet die hierbei auftretenden Symmetrien, die den Rechenaufwand erheblich reduzieren.)

(b) Beide Spieler haben genau dann dieselbe Anzahl von Assen, wenn gilt $X = Y$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit:

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + ... + P(X = 4, Y = 4) \\ &= \frac{1}{20825} \cdot (1150 + 4225 + 468 + 0 + 0) \\ &= \frac{5843}{20825} \approx 0.2806. \end{aligned}$$

(c) Spieler Nord und Süd haben genau dann alle 4 Asse, wenn gilt $X + Y = 4$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$\begin{aligned} P(X + Y = 4) &= P(X = 0, Y = 4) + P(X = 1, Y = 3) + ... + P(X = 4, Y = 0) \\ &= \frac{1}{20825} \cdot (55 + 286 + 468 + 286 + 55) \\ &= \frac{1150}{20825} \approx 0.0552. \end{aligned}$$

Aufgabe 44.

(a) Es sei Z der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen X und Y; wir setzen voraus, dass X und Y unabhängig und auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y sowie den Erwartungswert und die Verteilungsfunktion von Z.

(b) Die Zufallsvariablen V und W besitzen die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{V,W}(v, w) = \begin{cases} c \cdot (w^2 - v^2) \cdot e^{-w} & \text{, falls } -w \leq v \leq w\ ,\ 0 < w < \infty \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie c.

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Da X und Y unif$(0,1)$-verteilt sind, also beide die Dichte $1_{(0,1)}$ besitzen, gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \le x, Y \le y) = \int_0^x \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dy\,dx \\ &= \int_0^x \int_0^y f_X(x) \cdot f_Y(y) dy\,dx \quad \text{(Unabhängigkeit)} \\ &= \int_0^x \int_0^y 1\, dy\,dx = x \cdot y, \end{aligned}$$

für alle $x, y \in (0,1)$ und allgemein

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \le 0 \text{ oder } y \le 0, \\ x \cdot y & \text{, falls } x, y \in (0,1), \\ x & \text{, falls } x \in (0,1) \text{ und } y \ge 1, \\ y & \text{, falls } y \in (0,1) \text{ und } x \ge 1, \\ 1 & \text{, falls } x \ge 1 \text{ und } y \ge 1. \end{cases}$$

Man kann natürlich auch gleich mit der Unabhängigkeit von X und Y argumentieren und erhält dann sofort $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Der Erwartungswert von Z ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dy\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y\, dy\,dx \\ &= \int_0^1 y\, dy \cdot \int_0^1 x\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Auch hier kann man natürlich sofort mit der Unabhängigkeit von X und Y argumentieren und erhält $E(Z) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Für die Verteilungsfunktion von Z gilt

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) \;=\; P(X \cdot Y \le z) \;=\; P\big((X,Y) \in \{(x,y) \,:\, x \cdot y \le z\}\big) \\
&= \iint\limits_{\{(x,y)\,:\,x \cdot y \le z\}} f_{X,Y}(x,y)\; d(x,y) \;=\; \int_0^1 \int_0^{\min\{1,z/y\}} f_{X,Y}(x,y)\; dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\min\{1,z/y\}} f_X(x) \cdot f_Y(y)\; dx\, dy \;=\; \int_0^1 \int_0^{\min\{1,z/y\}} 1\; dx\, dy \\
&= \int_0^1 \min\left\{1, \frac{z}{y}\right\}\, dy \;=\; \int_0^z 1\; dy + \int_z^1 \frac{z}{y}\; dy \\
&= z + z \cdot \log(y)\Big|_z^1 \;=\; z + z \cdot (0 - \log(z)) \;=\; z - z \cdot \log(z)\;, \quad 0 < z < 1.
\end{aligned}$$

(b) Es muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{V,W}(v,w)\; d(v,w) = 1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{V,W}(v,w)\; d(v,w) \\
&= \int_0^{\infty} \int_{-w}^{w} c \cdot (w^2 - v^2) \cdot e^{-w}\; dv\, dw \;=\; \int_0^{\infty} c \cdot \left(w^2 \cdot v - \frac{v^3}{3}\right)\Big|_{-w}^{w} \cdot e^{-w}\; dw \\
&= c \cdot \int_0^{\infty} \left(2 \cdot w^3 - \frac{2 \cdot w^3}{3}\right) \cdot e^{-w}\; dw \;=\; c \cdot \int_0^{\infty} \frac{4 \cdot w^3}{3} \cdot e^{-w}\; dw \\
&= \;...\quad \text{(dreimal partielle Integration)} \\
&= c \cdot \int_0^{\infty} 8 \cdot e^{-w}\; dw \;=\; -c \cdot 8 \cdot e^{-w}\Big|_0^{\infty} \;=\; c \cdot 8,
\end{aligned}$$

und somit $c = 1/8$.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 12. Januar 2005

Aufgabenblatt 9 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 48. *(Das Postbotenproblem)*
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ von $(1, 2, ..., n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment (vgl. das Postbotenproblem, Beispiel 2.7 der Vorlesung). Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Hinweis. Es gilt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$.

(5 Punkte)

Lösung. Wir definieren Zufallsvariablen X_i, $i = 1, ..., n$, durch

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $Y = X_1 + ... + X_n$ und es gilt

$$EX_i = P\big(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i\}\big) = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$\text{Var } X_i = E\,X_i^2 - \big(E\,X_i\big)^2 = E\,X_i - \big(E\,X_i\big)^2 = \frac{(n-1)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E\,X_iX_j - E\,X_iE\,X_j \\ &= P(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i, \ \omega_j = j\}) - E\,X_iE\,X_j \\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E\,Y = \sum_{i=1}^{n} E\,X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1,$$

sowie mit der Gleichung von Bienaymé

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var} Y &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
&= n \cdot \left(\frac{(n-1)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!} \right)^2 \right) + (n^2 - n) \cdot \left(\frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!} \right)^2 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 49. *(Faltung der Gammaverteilung)*
Wir schreiben $\Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, für die in Aufgabe 38 vorgestellte Gammaverteilung mit den Parametern α und λ. Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.
(5 Punkte)

Lösung. Der Satz zur Faltung aus der Vorlesung besagt: Für alle $z > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx \\
&= \int_{0}^{z} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} \lambda^{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, (z-x)^{\beta-1} \lambda^{\beta} \cdot e^{-\lambda z}\, dx \\
&= e^{-\lambda z}\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, \lambda^{\alpha+\beta} \int_{0}^{z} x^{\alpha-1} \cdot (z-x)^{\beta-1}\, dx \\
&= e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1} \int_{0}^{1} y^{\alpha-1} \cdot (1-y)^{\beta-1}\, dy,
\end{aligned}
$$

wobei die Substitution $y = x \cdot z^{-1}$ verwendet wurde.
Der letzte Faktor hängt nun aber gar nicht mehr von z ab. Also ist die Dichte f_{X+Y} von $X + Y$ ein konstantes Vielfaches von

$$
e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1}, \quad z > 0,
$$

der Dichte zur Verteilung $\Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$. Da Wahrscheinlichkeitsdichten das Integral 1 haben, sind Dichten, die Vielfache voneinander sind, gleich. Also hat $X + Y$ die oben angegebene Dichte und ist somit $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$-verteilt.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
F. Dennert, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 19. Januar 2005

Aufgabenblatt 11 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 53: Die Zufallsvariablen X und Y seinen unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$V := X + Y \quad \text{und}$$
$$W := \frac{X}{X+Y}.$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, daß V und W unabhängig sind.

(3/2/1 Punkte)

Lösung: Es seien X und Y unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, es gilt also $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 \cdot \exp\big(-\lambda(x+y)\big)$. Benutze den Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten, um zunächst die gemeinsame Dichte von V und W zu bestimmen:

$$\mathcal{U} := (0,\infty)^2, \quad \mathcal{V} := (0,\infty) \times (0,1)$$
$$\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \Psi(x,y) := \Big(x+y, \frac{x}{x+y}\Big) =: (v,w).$$

Dann ist Ψ bijektiv und es ist

$$\Psi^{-1}(v,w) = \big(v \cdot w, v \cdot (1-w)\big).$$

Weiter ergibt sich

$$\big(\Psi^{-1}\big)' = \begin{pmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{pmatrix}$$

und

$$\Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| = v.$$

Nach dem Transformationssatz gilt dann für die gemeinsame Dichte von V und W:

$$\begin{aligned} f_{V,W}(v,w) &= \frac{1}{|\det\big(\Psi'(\Psi^{-1}(v,w))\big)|} \cdot f_{X,Y}\big(\Psi^{-1}(v,w)\big) \\ &= \Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| \cdot f_{X,Y}\big(\Psi^{-1}(v,w)\big) \\ &= v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v}. \end{aligned}$$

Durch Ausintegrieren über die einzelnen Komponenten erhält man dann die Dichten von V und W:

$$f_V(v) = \int_0^1 f_{V,W}(v,w)dw = \int_0^1 v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dw = v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v},$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{V,W}(v,w)dv = \int_0^\infty v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dv = 1,$$

jeweils für $v \in (0,\infty)$ bzw. $w \in (0,1)$. Daraus folgt, daß V Gamma-verteilt mit Parametern 2 und λ und W gleichverteilt auf $(0,1)$ ist, und wegen $f_{V,W}(v,w) = f_V(v) \cdot f_W(w)$ sind V und W unabhängig.

Aufgabe 54: (w'erzeugende Funktion zur Binomialverteilung)
X sei binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Es seinen X_1 und X_2 unabhängig und jeweils $\text{Bin}(n,p)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ (Faltung).

(3/2 Punkte)

Lösung: Es sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$, d.h. $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,...,n$.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E(z^X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \big(pz + (1-p)\big)^n \;=\; \big(1 - p(z-1)\big)^n. \end{aligned}$$

(b) Seien $X_1 \sim \text{Bin}(n,p)$ und $X_2 \sim \text{Bin}(n,p)$ und X_1 und X_2 unabhängig. Dann gilt für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen

$$E(z^{X_1+X_2}) = E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) = \big(1 - p(z-1)\big)^{2n}.$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion und Verteilung ist dann $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(2n,p)$.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
F. Dennert, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 2. Februar 2005

Aufgabenblatt 12 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 58: (momenterzeugende Funktion zur Gamma-Verteilung)

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

(b) Beweisen Sie damit, dass

$$\Gamma(\alpha, \lambda) \star \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

gilt.

(3/1 Punkte)

Lösung: (a) Es sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Dann lautet die momenterzeugende Funktion $\varphi_X(t)$ für alle $t < \lambda$:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= Ee^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (\lambda-t)^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \cdot 1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

(b) Sind X und Y unabhängig, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, so gilt

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha+\beta}$$

für alle $t < \lambda$, also ist $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

Aufgabe 59: Ein fairer Würfel wir 20 Mal geworfen. Es bezeichne X die Summe der Augenzahlen. (Die einzelnen Würfe werden als stochastisch unabhängig angenommen.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 30)$, $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ und $P(X = 100)$. (Es bietet sich an, dies mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von X zu tun und MAPLE zuhilfe zu nehmen.)

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den Werten der Dichte einer Normalverteilung mit den unter (b) ermittelten Parametern an den Stellen $x = 30, 50, 70, 100$.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und die Dichte aus Teil (c) in einem Diagramm dar.

(3/1/1/1 Punkte)

Lösung: (a) Es bezeichne X_i, $i = 1, ..., 20$, das Wurfergebnis im i. Versuch. Da die einzelnen Würfe des Würfels als stochastisch unabhängig angenommen werden, ergibt sich die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $g_X(z)$ von X als 20. Potenz der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion für einen einzelnen Wurf des Würfels, d.h. es ist

$$g_X(z) = \left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6\right)^{20}.$$

Multipliziert man dies aus, so erhält man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von z:

$$P(X = 30) = 0.5429991705 \cdot 10^{-8}, \quad P(X = 50) = 0.1652011820 \cdot 10^{-2},$$
$$P(X = 70) = 0.5181859020 \cdot 10^{-1}, \quad P(X = 100) = 0.1448751637 \cdot 10^{-4}.$$

MAPLE-Worksheet

```
[> Digits:=20:
[> g := x -> (1/6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6);
[> g20 := expand(g(x)^20):
[> c := i -> evalf(coeff(g20,x,i)):
[> c(30); c(50); c(70); c(100);
```

(b) Für einen einzelnen Wurf des Würfels ergibt sich $E(X_i) = 7/2$ und $\mathrm{var}(X_i) = 35/12$, und damit

$$E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20 \cdot \frac{7}{2} = 70$$

wegen der Linearität des Erwartungswerts, sowie

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{i=1}^{20} \mathrm{var}(X_i) = 20 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{3}$$

wegen der Gleichung von Bienamyé und der Unabhängigkeit der X_i.

MAPLE-Worksheet

```
[> ewert := sum(k/6,k=1..6);
[> mom2 := sum(k^2/6,k=1..6):
[> var := mom2 - ewert^2;
[> EWert := 20*ewert;
[> Var := 20*var;
```

(c) Wie in der Aufgabe gefordert, betrachten wir die Dichte

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 70$ und $\sigma^2 = \frac{175}{3}$. Es ergibt sich

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(30) = 0.5779803317 \cdot 10^{-7}, \quad \varphi_{\mu,\sigma^2}(50) = 0.1694111602 \cdot 10^{-2},$$
$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(70) = 0.5223380565 \cdot 10^{-1}, \quad \varphi_{\mu,\sigma^2}(100) = 0.2331739079 \cdot 10^{-4}.$$

Die Werte stimmen also absolut näherungsweise mit den in Teil (a) berechneten Wahrscheinlichkeiten überein, was ja auch aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt. Qualitativ läßt sich noch festhalten, daß die Approximation an den Rändern schlechter ist als im zentralen Bereich, konkret ergeben sich als relative Fehler die Werte $964,4\%$, $2,5\%$, $0,8\%$ und $60,9\%$. Das sieht zunächst einmal sehr schlecht aus, doch wie gesagt, absolut betrachtet liegen die Werte nahe bei einander, was auch die graphische Darstellung in Teil (d) beeindruckend vor Augen führt.

MAPLE-Worksheet

```
[> phi := x -> (2*Pi*Var)^(-1/2)*exp(-(x-EWert)^2/(2*Var)):
[> d := i -> evalf(phi(i)):
[> d(30); d(50); d(70); d(100);
```

(d) Darstellung unter MAPLE:

MAPLE-Worksheet

```
[> with(plots):
[> punkte := seq([i,c(i)],i=40..100):
[> plot1 := plot([punkte],style=point):
[> plot2 := plot(phi(x),x=40..100):
[> display([plot1,plot2]);
```

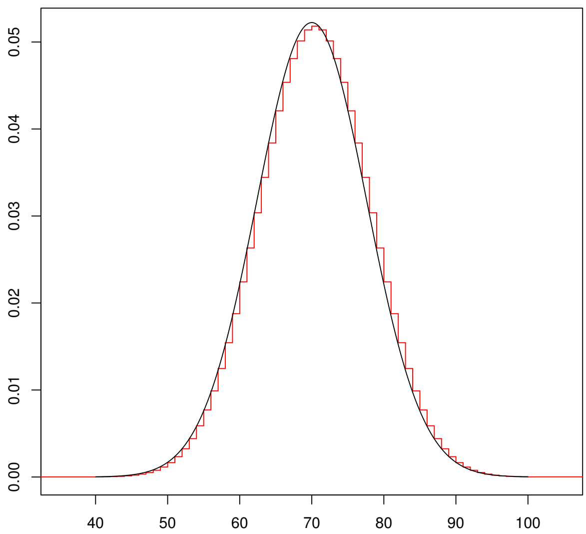


Abbildung 1: Vergleich von Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und Dichte der Normalverteilung