Lösungshinweise zur Klausur

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hannover, 4.2.2005

Aufgabe 1

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse mit

$$P(A_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \le P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \le \frac{1}{2}$$

gilt.

Lösung:

Einerseits gilt

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \le \min_{k=1,\ldots,n} P(A_k) = P(A_1) = \frac{1}{2}$$

Andererseits erhält man mit der Boolschen Ungleichung

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = 1 - P(A_1^C \cup \ldots \cup A_n^C) \ge 1 - \left(P(A_1^C) + \ldots + P(A_n^C)\right)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 1 + 2^{-n} = 2^{-n}$$

Aufgabe 2

Eine Urne enthalte 3 rote und 4 blaue Kugeln.

a) Es werden nacheinander und ohne zurücklegen zwei Kugeln zufällig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gezogene Kugel blau?

b) Es werden nacheinander und ohne zurücklegen drei Kugeln zufällig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel blau?

Lösung:

Es bezeichne X_i , $i = 1, 2, 3$ das Ergebnis der *i*-ten Ziehung.

Wir schreiben $X_i = r$ bzw. $X_i = b$ wenn eine rote bzw. blaue Kugel gezogen wurde.

a) $P(X_2 = b) = P(X_2 = b \mid X_1 = r)P(X_1 = r) + P(X_2 = b \mid X_1 = b)P(X_1 = b)$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} P(X_3 = b) = {} & P(X_3 = b \mid X_2 = r, X_1 = r)P(X_2 = r \mid X_1 = r)P(X_1 = r) + \\ & P(X_3 = b \mid X_2 = r, X_1 = b)P(X_2 = r \mid X_1 = b)P(X_1 = b) + \\ & P(X_3 = b \mid X_2 = b, X_1 = r)P(X_2 = b \mid X_1 = r)P(X_1 = r) + \\ & P(X_3 = b \mid X_2 = b, X_1 = b)P(X_2 = b \mid X_1 = b)P(X_1 = b) \\ = {} & \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Alternativ:
Man betrachtet das Zufallsexperiment, bei dem alle 7 Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen aus der Urne gezogen werden. Man erhält so ein Laplace-Experiment über dem Raum der 7! Permutationen aller Kugeln. In der *k*-ten Ziehung wird genau dann eine blaue Kugel gezogen, wenn dieses Experiment eine Permutation liefert, die an der *k*-Position eine blaue Kugel aufweist. Hiervon gibt es gerade $4 \cdot 6!$ verschiedene (eine von 4 blauen Kugeln in Position k, die übrigen 6 Kugeln frei permutiert), die Wahrscheinlichkeit, in der *k*-ten Ziehung eine blaue Kugel zu erwischen beträgt also $4/7$ für alle $k = 1, \ldots, 7$.

Aufgabe 3

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. *X* bezeichne das Ergebnis des ersten, *Y* das des zweiten Wurfes.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $\left|X-Y\right|$ und $\min\{X,Y\}$ sowie die Marginalverteilungen und stellen Sie diese tabellarisch dar.

b) Sind $\left|X-Y\right|$ und $\min\{X,Y\}$ unabhängig?

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\left|X-Y\right|$.

d) Bestimmen Sie $P\left(\left|X-Y\right|=\min\{X,Y\}\right)$.

Lösung:

a) Tabellarische Darstellung (jeweils $\cdot 1/36$):

		$\left\|X-Y\right\|$ 0	1	2	3	4	5	$P\left(\min\{X,Y\}=i\right)$
$\min\{X,Y\}$	1	1	2	2	2	2	2	11
	2	1	2	2	2	2	0	9
	3	1	2	2	2	0	0	7
	4	1	2	2	0	0	0	5
	5	1	2	0	0	0	0	3
	6	1	0	0	0	0	0	1
$P\left(\left\|X-Y\right\|=j\right)$		6	10	8	6	4	2	36

Werte müssen begründet werden!

b) Es gilt beispielsweise

$$P\left(\left|X-Y\right|=5,\min\{X,Y\}=6\right)=0\neq P\left(\left|X-Y\right|=5\right)P\left(\min\{X,Y\}=6\right)=\frac{2}{36}\cdot\frac{1}{36},$$

also sind $\left|X-Y\right|$ und $\min\{X,Y\}$ nicht unabhängig.

c) Es gilt

$$E\left|X-Y\right|=\sum_{k=0}^{5}k\cdot P\left(\left|X-Y\right|=k\right)=0\cdot 36+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{26}+3\cdot\frac{6}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

d) Es gilt

$$P\left(\left|X-Y\right|=\min\{X,Y\}\right)=\sum_{k=1}^{5}P\left(\left|X-Y\right|=\min\{X,Y\}=k\right)$$

$$=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+0+0=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Aufgabe 4

Es seien *a, b, c* $\in \mathbb{R}$ mit $0 \le a < b$. Weiter sei

$$f(x) := \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & a^2 < x < b^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Für welchen Wer von *c* handelt es sich bei *f* um eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Sei $Y \sim \text{unif}(a,b)$. Zeigen Sie, dass *f* mit der unter a) bestimmten Konstanten *c* die Dichte zu $X := Y^2$ ist.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

d) Berechnen Sie $P(X > EX)$ im Fall $a = 0$ und $b = 1$.

Lösung:

a) Aus $\int f(x)\,dx = 1$ folgt $c = \frac{1}{2(b-a)}$.

b) Es gilt $X = g(Y)$ mit $g(y) = y^2$. Für $y \ge 0$ ist g bijektiv und die Umkehrfunktion lautet $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Nach dem Transformationssatz für Dichten erhält man also als Dichte von *X*

$$f_X(x) = \left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| \cdot f_Y\left(g^{-1}(x)\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot 1_{(a,b)}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(b-a)} 1_{(a^2,b^2)}(x).$$

Alternativ: Berechnung der Verteilungsfunktion für *X* und Ableiten.

c) Es gilt

$$EX = \int_{a^2}^{b^2} x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(b-a)}\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

d) Es gilt $EX = 1/3$ und damit

$$P(X > EX) = \int_{1/3}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Aufgabe 5

Es seien *X*, *Y* unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{unif}(-1,1)$, $Y \sim \text{Exp}(1/2)$. Weiter seien

$$V := \sqrt{Y} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right), \qquad W := \sqrt{Y} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} X\right).$$

a) Bestimmen Sie eine gemeinsame Dichte von *V* und *W*.
b) Bestimmen Sie Dichten zu *V* und *W*. Sind *V* und *W* unabhängig?
c) Welche Verteilung hat *W*?

Lösung:

a) *X* und *Y* sind unabhängig, die gemeinsame Dichte lautet also

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} e^{-y/2}, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < y < \infty.$$

X und *Y* werden nun der Transformation $\Psi : (-1,1) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (-\infty,\infty)$,

$$\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \sqrt{y}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

unterworfen. Dabei gilt offenbar

$$v^2 + w^2 = y \text{ sowie } \frac{\pi}{2}\arctan\left(\frac{w}{v}\right) = x$$

also

$$\Psi^{-1}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{w}{v}\right) \\ v^2 + w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix der Umkehrfunktion ergibt sich damit zu

$$\left(\Psi^{-1}\right)'\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-w}{v^2 + w^2} & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{v}{v^2 + w^2} \\ 2v & 2w \end{pmatrix}$$

und damit schließlich

$$\left|\det\left(\Psi^{-1}\right)'\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right| = \frac{\pi}{4}.$$

Also

$$f_{V,W}(v,w) = \frac{1}{\pi} e^{-\left(v^2 + w^2\right)/2}, \quad 0 < v < \infty, \quad -\infty < w < \infty.$$

b) Es gilt

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\left(v^2+w^2\right)/2}\, dw = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\, dw = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-v^2/2}\,, \quad 0 < v < \infty\,,$$

und aufgrund der Symmetrie in v und w und weil der Integrand eine gerade Funktion ist,

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\left(v^2+w^2\right)/2}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-w^2/2}\,, \quad -\infty < w < \infty.$$

Damit gilt

$$f_V(v) \cdot f_W(w) = f_{V,W}(v,w),$$

also sind *V* und *W* unabhängig.

c) *W* ist offensichtlich standartnormalverteilt.

Aufgabe 6

Sei $c \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) := c \cdot \exp(-\lambda |x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

a) Für welchen Wert von *c* handelt es sich bei *f* um eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) *F* mit der unter a) bestimmten Konstante *c* sei die Dichte der Zufallsvariablen *X*. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu *X*.

c) *X* und *Z* seien unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche Dichte hat $Y - Z$?

d) Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen *X* aus b).

Lösung:

a) $\int f(x)\,dx = 1$ liefert $c = \lambda/2$.

b) Es gilt

$$\varphi_X(t) = Ee^{tX} = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} e^{tx+\lambda x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx-\lambda x}\,dx \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda + t} + \frac{1}{\lambda - t} \right) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2}, \quad |t| < \lambda.$$

c) Es ist $\varphi_Y(t) = \lambda/(\lambda - t)$ und $\varphi_{-Z}(t) = \varphi_Y(-t) = \lambda/(\lambda + t)$, also aufgrund der Unabhängigkeit

$$\varphi_{Y-Z}(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_{-Z}(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2}, \quad |t| < \lambda,$$

also hat $Y - Z$ Dichte *f*.
Alternativ: mit der Faltungsformel für Dichten.

d) Es ist

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2} = \frac{1}{1 - (t/\lambda)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{2k},$$

also gilt $EX = 0$ und damit

$$\operatorname{var}(X) = EX^2 = \varphi_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Alternativ mit Teil c):

$$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(Y - Z) = \operatorname{var}(Y) + \operatorname{var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Hinweis 1:
Es handelt sich um eine Auswahlklausur! Die Klausur gilt als zu 100% gelöst, wenn 40 der maximal möglichen 45 Punkte erreicht wurden. Darüber hinaus ist bei bestandener Klausur eine weitere Aufwertung des Ergebnisses anhand der erreichten Hausübungspunkte gemäß dem im Hinweisblatt zu dieser Vorlesung festgelegten Modus möglich.

Erlaubte Hilfsmittel:
Die persönlichen Unterlagen zur Vorlesung und den zugehörigen Übungen, eine Formelsammlung, ein nicht-programmierbarer Taschenrechner.

Hinweis 2:
Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nicht trivialen Umformungen.