

Klausur zur Vorlesung Stochastik A

Aufgabe 1

Eine Urne enthält drei weiße, eine rote und sechs schwarze Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander und ohne Zurücklegen zufällig entnommen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln unterschiedliche Farben?
- Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln weiß sind, wenn die entnommenen Kugeln dieselbe Farbe haben?

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Die Ereignisse A , B und C seien unabhängig, mit den Wahrscheinlichkeiten $1/2$, $1/3$ und $1/4$. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl dieser Ereignisse, die eintreten (beispielsweise gilt $X = 3$ genau dann, wenn A , B und C eintreten).

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und den Erwartungswert zu X .

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und beide geometrisch verteilt mit

Parameter p , d.h. $P(X = k) = P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Zufallsvariablen denselben Wert annehmen.

(3 Punkte)

Aufgabe 4

Bekanntlich heißt eine Zufallsvariable X exponentialverteilt mit Parameter λ , wenn sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x > 0$ hat. Im Folgenden sei X eine Zufallsvariable mit dieser Verteilung.

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu X .
- Es sei $Y := \lambda X$. Welche Verteilung hat Y ?
- Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X .
- Zeigen Sie (i) direkt, (ii) mit Hilfe von momenterzeugenden Funktionen, dass die alle $n \in \mathbb{N}$ das n -te Moment von X gegeben wird durch $n \in \mathbb{N}$.

(2+2+2+4 Punkte)

Aufgabe 5

Es sei $a > 0$ und

$$f(x) := \begin{cases} c/(1+x), & \text{für } 0 < x < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für welchen Wert von c handelt es sich bei f um eine Wahrscheinlichkeitsdichte?
- Es sei nun c so gewählt, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Weiter sei X eine Zufallsvariable mit dieser Dichtefunktion. Bestimmen Sie den Erwartungswert zu X .

(2+3 Punkte)

Aufgabe 6

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und beide exponentialverteilt mit Parameter λ (siehe auch Aufgabe 4).

- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z := X(X + Y)$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Umfang eines Rechteckes mit den Seitenlängen X und Y größer als 3?

(3+4 Punkte)