

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A WS 2004/05

Hannover, 4.2.2005

Aufgabe 1

Es seien A_1, \dots, A_n Ereignisse mit

$$P(A_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \frac{1}{2}$$

gilt.

Aufgabe 2

Eine Urne enthalte 3 rote und 4 blaue Kugeln.

- a) Es werden nacheinander und ohne zurücklegen zwei Kugeln zufällig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite gezogene Kugel blau?
- b) Es werden nacheinander und ohne zurücklegen drei Kugeln zufällig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte gezogene Kugel blau?

Aufgabe 3

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. X bezeichne das Ergebnis des ersten, Y das des zweiten Wurfes.

- a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $|X - Y|$ und $\min\{X, Y\}$ sowie die Marginalverteilungen und stellen Sie diese tabellarisch dar.
- b) Sind $|X - Y|$ und $\min\{X, Y\}$ unabhängig?
- c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $|X - Y|$.
- d) Bestimmen Sie $P(|X - Y| = \min\{X, Y\})$.

Aufgabe 4

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$. Weiter sei

$$f(x) := \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & a^2 < x < b^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für welchen Wert von c handelt es sich bei f um eine Wahrscheinlichkeitsdichte?
- Sei $Y \sim \text{unif}(a, b)$. Zeigen Sie, dass f mit der unter a) bestimmten Konstanten c die Dichte zu $X := Y^2$ ist.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert von X .
- Berechnen Sie $P(X > EX)$ im Fall $a = 0$ und $b = 1$.

Aufgabe 5

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{unif}(-1, 1)$, $Y \sim \text{Exp}(1/2)$. Weiter seien

$$V := \sqrt{Y} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}X\right), \quad W := \sqrt{Y} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right).$$

- Bestimmen Sie eine gemeinsame Dichte von V und W .
- Bestimmen Sie Dichten zu V und W . Sind V und W unabhängig?
- Welche Verteilung hat W ?

Aufgabe 6

Sei $c \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) := c \cdot \exp(-\lambda|x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Für welchen Wert von c handelt es sich bei f um eine Wahrscheinlichkeitsdichte?
- f mit der unter a) bestimmten Konstante c sei die Dichte der Zufallsvariablen X . Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu X .
- X und Z seien unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche Dichte hat $Y - Z$?
- Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X aus b).

Hinweis:

Es handelt sich um eine Auswahlklausur! Die Klausur gilt als zu 100% gelöst, wenn 40 der maximal möglichen 45 Punkte erreicht wurden. Darüber hinaus ist bei bestandener Klausur eine weitere Aufwertung des Ergebnisses anhand der erreichten Hausübungspunkte gemäß dem im Hinweisblatt zu dieser Vorlesung festgelegten Modus möglich.

Erlaubte Hilfsmittel:

Die persönlichen Unterlagen zur Vorlesung und den zugehörigen Übungen, eine Formelsammlung, ein nicht-programmierbarer Taschenrechner.